ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΚΑΝΑΛΙΟΥ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΠΙΛΟΤΙΚΩΝ ΥΠΟ-ΦΕΡΟΥΣΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΟΛΥΠΛΕΞΙΑΣ ΜΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ

Στέλιος Στεφανάτος, Α.Μ. 98227
Υπεύθυνος καθηγητής : Ανδρέας Πολύδωρος

Σεπτέμβριος 2003

Εισαγωγή

Η σημαντικότερη αιτία παραμόρφωσης του σήματος σε ένα σύστημα επικοινωνίας είναι το κανάλι μέσω του οποίου διέρχεται το σήμα από τον πομπό στον δέκτη. Για να είναι δυνατή η σωστή ανίχνευση των δεδομένων είναι αναγκαία η εξίσωση καναλιού του εισερχόμενου στον δέκτη σήματος, που προϋποθέτει γνώση του καναλιού. Λόγω του θορύβου και της δυναμικής του καναλιού σε ένα πρακτικό σύστημα επικοινωνίας η τέλεια γνώση του είναι αδύνατη. Για αυτό το λόγο γίνεται χρήση μεθόδων εκτίμησης του καναλιού, βάση των οποίων γίνεται η εξίσωση του.

Τα τελευταία χρόνια έχει γίνει μεγάλη έρευνα στην ανάπτυξη των συστημάτων πολυπλεξίας με ορθογώνια διαίρεση συχνότητας (OFDM). Το OFDM είναι σύστημα πολλών ορθογώνιων υπο-φέρουσων η ορθογωνιότητα των οποίων βασίζεται στην εφαρμογή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT). Σε σχέση με τα κλασικά συστήματα μιας φέρουσας συχνότητας έχει πολλά πλεονεκτήματα όπως είναι ο μεγαλύτερος ρυθμός εκπομπής δεδομένων, η πλήρης εξάλειψη της αλληλοπαρεμβολής (ISI) και η απλή εξίσωση καναλιού. Επιπλέον η χρήση του γρήγορου μετασχηματισμού Fourier (FFT) στις διαδικασίες διαμόρφωσης/αποδιαμόρφωσης του OFDM σήματος μειώνει την πολυπλοκότητα της υλοποίησής του.

Στο κείμενο αυτό εξετάζονται μέθοδοι εκτίμησης καναλιού σε συστήματα OFDM με χρήση πιλοτικών συμβόλων. Τα πιλοτικά σύμβολα είναι γνωστά στο δέκτη σύμβολα τα οποία εκπέμπονται περιοδικά σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές και επιτρέπουν την εκτίμηση του καναλιού με βάση την πληροφορία που μεταφέρουν. Η χρήση πιλοτικών συμβόλων για την εκτίμηση καναλιού έχει μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία και εφαρμόζεται στην πράξη έναντι άλλων μεθόδων, λόγω των ακριβέστερων εκτιμήσεων και την απλότητα της υλοποίησης, με κόστος την σπατάλη ενέργειας και διαθέσιμου εύρους ζώνης.

Συνοπτικά, τα κεφάλαια του κειμένου είναι οργανωμένα ως εξής. Στο κεφάλαιο 1 γίνεται μία σύντομη περιγραφή της λειτουργίας και των χαρακτηριστικών ενός συστήματος OFDM. Στο κεφάλαιο 2 γίνεται η περιγραφή των καναλιών που θα θεωρηθούν στην ανάλυση των διαφόρων μεθόδων εκτίμησης καναλιού. Επιπλέον εξετάζονται θέματα όπως η διακριτή αναπαράστασή του καναλιού και η λειτουργία του OFDM συστήματος σε συνθήκες όπου το κανάλι μεταβάλλεται πολύ γρήγορα. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται το πρόβλημα της εκτίμησης καναλιού στα πλαίσια ενός συστήματος OFDM και εξετάζεται η απλούστερη μέθοδος εκτίμησης καναλιού, η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων. Στα κεφάλαια 4 και 5 γίνεται η παρουσίαση και ανάλυση των πιο πολύπλοκων αλγορίθμων εκτίμησης καναλιού οι οποίοι βασίζονται στην επεξεργασία σήματος στην μία ή στις δύο διαστάσεις αντίστοιχα. Επίσης εξετάζεται το θέμα της κατανομής των πιλοτικών συμβόλων. Στο κεφάλαιο 6 γίνεται αξιολόγηση των μεθόδων σε διάφορες συνθήκες λειτουργίας με βάση προσομοιώσεις και τα τελικά συμπεράσματα παρουσιάζονται στο κεφάλαιο 7.

Περιεχόμενα

Σχήματα

Πίνακες

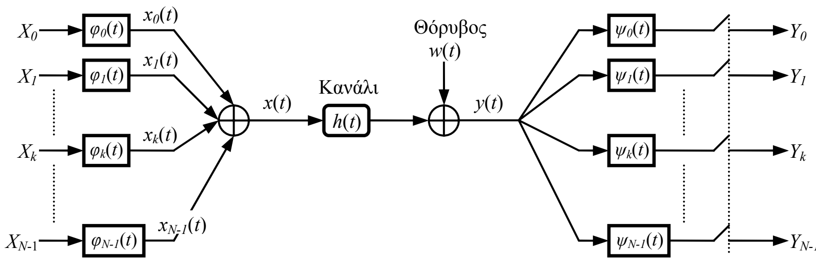
Ακρωνύμια

CP	κυκλικό πρόθεμα
D/A – A/D	μετατροπή διακριτού (συνεχούς) σήματος σε συνεχές (διακριτό)
DFT	διακριτός μετασχηματισμός Fourier
FDM	πολυπλεξία με διαίρεση συχνότητας
FFT	γρήγορος (διακριτός) μετασχηματισμός Fourier
FIR	(φίλτρο) πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης
ICI	αλληλοπαρεμβολή μεταξύ υπο-φέρουσων OFDM συστήματος
IDFT	αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier
IFFT	αντίστροφος γρήγορος (διακριτός) μετασχηματισμός Fourier
ISI	αλληλοπαρεμβολή μεταξύ συμβόλων
LMS	(αλγόριθμος εκτίμησης-εξίσωσης καναλιού) ελαχίστου μέσου τετραγώνου
LOS	οπτική διαδρομή μεταξύ πομπού και δέκτη
LS	(εκτίμηση-επίλυση) ελάχιστων τετραγώνων
MAP	(εκτίμηση) μέγιστης αποστεριόρι πιθανότητας
ML	(εκτίμηση) μέγιστης πιθανοφάνειας
MMSE	ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα
MSE	μέσο τετραγωνικό σφάλμα
OFDM	πολυπλεξία με ορθογώνια διαίρεση συχνότητας
PSAM	διαμόρφωση με εκπομπή πιλοτικών συμβόλων
S/P – P/S	μετατροπή της σειριακής (παράλληλης) διάταξης τιμών μιας ακολουθίας σε παράλληλη (σειριακή)
SER	ποσοστό λανθασμένης ανίχνευσης συμβόλου
SNR	λόγος σήματος προς θόρυβο
SVD	singular value decomposition (μετασχηματισμός πινάκων)

1. *Πολυπλεξία με Ορθογώνια Διαίρεση Συχνότητας (OFDM)*

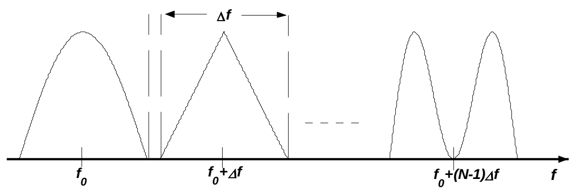
1.1 Εισαγωγή στο OFDM : Γενικές αρχές

Η πολυπλεξία με ορθογώνια διαίρεση συχνότητας (orthogonal frequency division multiplexing – OFDM) μπορεί να θεωρηθεί επέκταση του κλασικού συστήματος πολυπλεξίας με διαίρεση συχνότητας (frequency division multiplexing – FDM). Με την τεχνική FDM είναι δυνατή η ταυτόχρονη μετάδοση περισσότερων του ενός σημάτων, με επιλογή διαφορετικής φέρουσας συχνότητας για κάθε ένα από αυτά. Εφόσον οι υπο-φέρουσες συχνότητες (sub-carriers) επιλεχθούν έτσι ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη των φασμάτων, είναι δυνατός ο διαχωρισμός των σημάτων από τον δέκτη. Ένα τυπικό σύστημα FDM βασικής ζώνης φαίνεται στο σχήμα 1-1.



Σχήμα 1-1 Σύστημα FDM βασικής ζώνης

Θεωρείται ότι η περίοδος δειγματοληψίας του συστήματος είναι T_s. Τα σύμβολα X_k, $0 \le k \le N-1$ που παράγονται με ρυθμό $1/T_s$, διατάσσονται παράλληλα και πολλαπλασιάζονται με τις κυματομορφές $\varphi_k(t)$, $0 \le t \le T = NT_s$, οπότε προκύπτουν τα σήματα $x_k(t)$. Ο πολλαπλασιασμός με τις κυματομορφές εκφράζει την διαμόρφωση από τα σύμβολα X_k των υπο-φέρουσων με συχνότητα $f_k = f_c + k\Delta f$, $f_c, \Delta f$: σταθερές. Η άθροιση των σημάτων $x_k(t)$ δίνει το σύνθετο σήμα $x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k(t)$. Προκειμένου να μην υπάρχει επικάλυψη των φασμάτων, θα πρέπει το φάσμα των σημάτων $x_k(t)$ να είναι πεπερασμένο και μικρότερο από Δf. Συνήθως χρησιμοποιούνται κατάλληλα φίλτρα ώστε να εξασφαλιστεί το πεπερασμένο των φασμάτων $\mathrm{F}\{x_k(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_k(t) e^{-j\Omega t} dt$, ενώ για να είναι πιο εύκολος ο διαχωρισμός τους από τον δέκτη χρησιμοποιείται μεταξύ διαδοχικών υπο-φέρουσων συχνοτήτων μία ζώνη διαχωρισμού (guard band) στην οποία δεν επιτρέπεται να υπάρχει πληροφορία. Το φάσμα $\mathrm{F}\{x(t)\}$ ενός τυπικού FDM σήματος $x(t)$ έχει την μορφή του σχήματος 1-2.



Σχήμα 1-2 Τυπική μορφή φάσματος ενός FDM σήματος

Θεωρώντας ιδανικό κανάλι, δηλαδή $h(t)=\delta(0)$, όπου $\delta(m-n)=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases}$, το εισερχόμενο στον δέκτη σήμα θα είναι ίσο με $y(t)=x(t)+w(t)$, όπου $w(t)$ ο θόρυβος του συστήματος. Μετά την αποδιαμόρφωση του σύνθετου σήματος, ο διαχωρισμός των σημάτων γίνεται με κατάλληλης κεντρικής συχνότητας ζωνοπερατά φίλτρα (δεν φαίνονται στο σχήμα) που επιτρέπουν την διέλευση ενός συγκεκριμένου σήματος $x_k(t)$. Στην συνέχεια το σήμα επαναφέρεται στην βασική ζώνη και τελικά διέρχεται από τον δέκτη προσαρμοσμένου φίλτρου (matched filter receiver) με κρουστική απόκριση $\psi_k(t)=\varphi_k^*(T-t)$ [1], όπου ο συμβολισμός $(.)^*$ εκφράζει μιγαδικό συζυγές. Η έξοδος του φίλτρου δειγματοληπτείται ανά περίοδο $T=NT_s$ και στην συνέχεια οδηγείται στον ανιχνευτή μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood detector), η έξοδος του οποίου θα δώσει και την τελική απόφαση για το ληφθέν σύμβολο.

Οι βασικές αρχές ενός συστήματος OFDM είναι παρόμοιες με αυτές του FDM. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι στο OFDM τα φάσματα των επιμέρους σημάτων είναι ορθογώνια μεταξύ τους με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπεται η επικάλυψη ανάμεσά τους και ταυτόχρονα να είναι δυνατός ο διαχωρισμός τους από τον δέκτη. Έτσι είναι δυνατή η καλύτερη αξιοποίηση του διαθέσιμου εύρους ζώνης, αφού στο ίδιο εύρος μπορούν να μεταδοθούν περισσότερα σήματα.

Προκειμένου το φάσμα των σημάτων να είναι ορθογώνιο μεταξύ τους θα πρέπει να επιλεγούν κατάλληλες κυματομορφές $\varphi_k(t)$. Είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις $f_n(x)=\mathbf{exp}(j2\pi nx/T)$ αποτελούν ορθογώνια βάση στο διάστημα $[0,T]$ εφόσον ισχύει :

$$\int_0^T f_n(x)f_m^*(x)dx=\int_0^T e^{j\frac{2\pi}{T}(n-m)x}dx=T\delta(n-m) \tag{1.1}$$

Με βάση αυτή την παρατήρηση, οι κυματομορφές $\varphi_k(t)$ του σχήματος 1-1 επιλέγονται ίσες με

$$\varphi_k(t)=e^{j\frac{2\pi}{T}kt}\ ,\ 0\leq t\leq T \tag{1.2}$$

όπου $T=NT_s$. Οι κυματομορφές $\varphi_k(t)$ της (1.2) εκφράζουν τετραγωνικούς παλμούς διάρκειας T που μεταδίδονται σε συχνότητα $f_k=f_c+k/T$, f_c :σταθερά. Αντίστοιχα, ο δέκτης προσαρμοσμένου φίλτρου έχει κρουστική απόκριση $\psi_k(t)=\varphi_k^*(T-t)$. Το σύνθετο σήμα που προκύπτει από το άθροισμα των επιμέρους σημάτων $x_k(t)$ (αναφέρεται και ως OFDM σύμβολο) δίνεται από την σχέση :

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} x_k(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} X_k \varphi_k(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-j\frac{2\pi}{T}kt},\ 0 \le t \le T \tag{1.3}$$

με τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα $1/T$ να εμφανίζεται για ευκολία στην μαθηματική ανάλυση. Στην ιδεατή περίπτωση όπου το κανάλι είναι ιδανικό και δεν υπάρχει θόρυβος, η έξοδος του k δέκτη προσαρμοσμένου φίλτρου δειγματοληπτημένη την χρονική στιγμή T θα είναι :

$$Y_k = \int_0^t x(\tau)\psi_k(t-\tau)\,d\tau\Bigg|_{t=T} = \int_0^T x(\tau)\psi_k(T-t)\,d\tau = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{l=0}^{N-1} X_l \varphi_l(\tau)\psi_k(T-\tau)\,d\tau \tag{1.4}$$

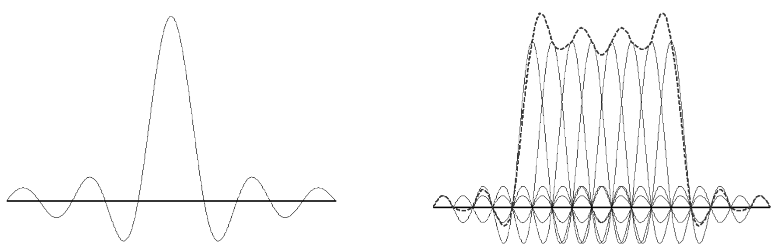
Για την κρουστική απόκριση του δέκτη προσαρμοσμένου φίλτρου ισχύει :

$$\psi_k(T-t) = \varphi_k^*(T-T+\tau) = \varphi_k^*(\tau). \tag{1.5}$$

Επομένως,

$$Y_k = \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{N-1} X_l \int_0^T \varphi_l(\tau)\varphi_k^*(\tau)\,d\tau = \frac{1}{T}\sum_{l=0}^{N-1} X_l T\delta(k-l) = X_k \tag{1.6}$$

Η δειγματοληπτημένη έξοδος του k προσαρμοσμένου φίλτρου προκύπτει ίση με το σύμβολο X_k, κάτι το οποίο οφείλεται στην ορθογωνιότητα των κυματομορφών $\varphi_k(t)$. Η ορθωγονιότητα φαίνεται στο σχήμα 1-3 όπου παρουσιάζεται το φάσμα ενός OFDM συστήματος με $N=8$ διαφορετικές υπο-φέρουσες συχνότητες θεωρώντας ότι $X_k=1$ για όλα τα k. Συγκεκριμένα στο σχήμα 1-3-1 φαίνεται το φάσμα μίας υπο-φέρουσας συχνότητας και στο 1-3-2 το σύνθετο φάσμα (φάσμα του OFDM σήματος) που προκύπτει από την υπέρθεση των φασμάτων των 8 υπο-φέρουσων συχνοτήτων (διακεκομμένη καμπύλη). Το φάσμα της κάθε υπο-φέρουσας συχνότητας έχει την μορφή της συνάρτησης δειγματοληψίας (sinc function), εφόσον αποτελεί τον μετασχηματισμό Fourier της $\varphi_k(t)$ που είναι τετραγωνικός παλμός. Η ορθογωνιότητα των φασμάτων έχει ως αποτέλεσμα στις συχνότητες f_k το φάσμα των σημάτων $x_l(t),\ l \ne k$ να είναι ίσο με μηδέν.



1 2

Σχήμα 1-3
1. Φάσμα μιας υπο-φέρουσας OFDM συστήματος,
2. Φάσμα OFDM σήματος (διακεκομμένη γραμμή)

Στα πρακτικά OFDM συστήματα ο αριθμός των υπο-φέρουσων συχνοτήτων είναι αρκετά μεγαλύτερος (συνήθως ισχύει $N \geq 64$). Αν στο ίδιο εύρος ζώνης του σχήματος 1-3-2 υπήρχαν περισσότερες ορθογώνιες υποφέρουσες συχνότητες, το συνολικό φάσμα θα ήταν περισσότερο "τετραγωνισμένο" και θα έφθινε γρηγορότερα στις συχνότητες εκτός εύρους ζώνης, εφόσον το φάσμα της k υπο-φέρουσας θα ήταν περισσότερο συγκεντρωμένο στην συχνότητα f_k. Προκειμένου να μειωθούν ακόμα περισσότερο οι συχνότητες του OFDM σήματος που βρίσκονται έξω από το εύρος ζώνης του συστήματος, οι ακραίες υπο-φέρουσες συνήθως δεν μεταφέρουν πληροφορία (αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες), ενώ και το OFDM σήμα που προκύπτει διέρχεται από κατάλληλο φίλτρο εκπομπής για περαιτέρω βελτίωση του φάσματός του.

1.1.1 Εφαρμογή του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT)

Το OFDM σύστημα όπως περιγράφθηκε παραπάνω, ενώ εκμεταλλεύεται καλύτερα το διαθέσιμο εύρος ζώνης, παραμένει πολύπλοκο αφού είναι απαραίτητες οι γεννήτριες των κυματομορφών $\varphi_k(t)$ για το κάθε σύμβολο X_k, ενώ και στον δέκτη είναι απαραίτητη η ύπαρξη προσαρμοσμένων φίλτρων για την αποδιαμόρφωση του λαμβανόμενου σήματος. Με στόχο της μείωση της πολυπλοκότητας του συστήματος, πολύ σημαντική είναι η παρατήρηση ότι η δειγματοληψία του OFDM σύμβολου $x(t) = (1/T)\sum_{k=0}^{N-1} X_k \varphi_k(t),\ \ 0 \leq t \leq T = NT_s$, με την περίοδο T_s του συστήματος, δίνει την διακριτή ακολουθία $\{x(n)\}$:

$$x(n) \equiv x(nT_s) = \frac{1}{NT_s}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{NT_s}knT_s} = \frac{1}{T_s} \cdot \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\ 0 \leq n \leq N-1 \qquad (1.7)$$

Το δεξιό μέλος της (1.7) αποτελεί τον αντίστροφο διακριτό μετασχηματισμό Fourier (inverse discrete Fourier transform – IDFT) [2] της διακριτής ακολουθίας X_k, $0 \leq k \leq N-1$, πολλαπλασιασμένη με τον παράγοντα $1/T_s$. Αν θεωρηθεί ότι τα σύμβολα X_k αποτελούν μία ακολουθία στο πεδίο της συχνότητας, ο διακριτός αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier N-σημείων αυτής της ακολουθίας

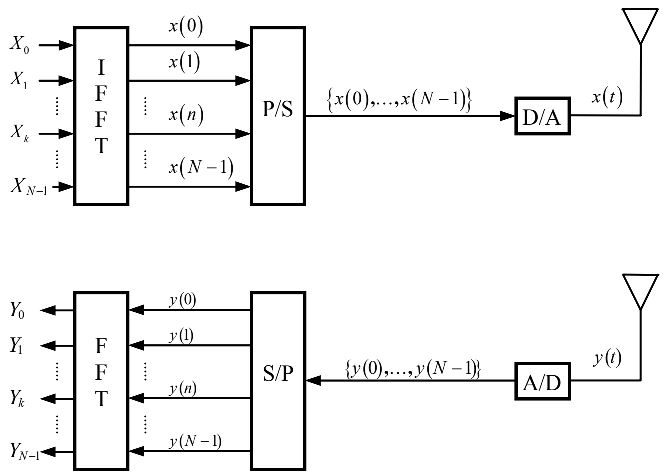
$$x(n) = \left(IDFT\{X_k\}\right)(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\ 0 \leq n \leq N-1 \qquad (1.8)$$

θα είναι η διακριτή αναπαράσταση του OFDM συμβόλου στο πεδίο του χρόνου σύμφωνα με την (1.7). Η διακριτή αυτή ακολουθία στην συνέχεια μπορεί να μετατραπεί σε συνεχές σήμα με την διέλευση της από χαμηλοπερατό φίλτρο κατάλληλου εύρους ζώνης και πλάτους. Έτσι προκύπτει το OFDM σήμα $x(t)$ από τα σύμβολα X_k με έναν διακριτό μετασχηματισμό Fourier (IDFT) και με μετατροπή του διακριτού σήματος σε συνεχές (Digital-to-Analog conversion) [2]. Η διαδικασία αυτή είναι πολύ πιο απλή από την χρήση των k γεννητριών κυματομορφών $\varphi_k(t)$ όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ενώ και η υλοποίηση του IDFT μέσω του αλγόριθμου IFFT μειώνει ακόμα περισσότερο την πολυπλοκότητα.

Αντίστοιχα, και ο δέκτης του OFDM συστήματος μπορεί να απλοποιηθεί με την χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Πάλι θεωρώντας ιδανικό κανάλι και μηδενικό θόρυβο, το εισερχόμενο σήμα $y(t)=x(t)$ δειγματοληπτείται στον δέκτη (Analog-to-Digital conversion) με περίοδο T_s και μετατρέπεται στην διακριτή ακολουθία $y(n)=x(n)$ της (1.8). Αντί της χρήσης των k προσαρμοσμένων φίλτρων, η αποδιαμόρφωση του (διακριτού) σήματος γίνεται μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (DFT) N-σημείων. Ο μετασχηματισμός αυτός θα δώσει την ακολουθία $\{Y_k\}$, της οποίας το k στοιχείο θα είναι ίσο με

$$\begin{aligned} Y_k &= \left(DFT\left\{x(n)\right\}\right)(k) = \left(DFT\left\{IDFT\left\{X_k\right\}\right\}\right)(k) \\ &= \left\{X_k\right\}(k) = X_k,\ 0 \le k \le N-1 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με την (1.6) με την διαφορά ότι προέκυψε πολύ πιο εύκολα χρησιμοποιώντας σχετικά απλές μεθόδους επεξεργασίας σήματος διακριτού χρόνου. Στο σχήμα 1-4 φαίνεται ένα σύστημα πομπού – δέκτη όπως περιγράφηκε παραπάνω, υλοποιημένο με μετασχηματισμούς IFFT – FFT.



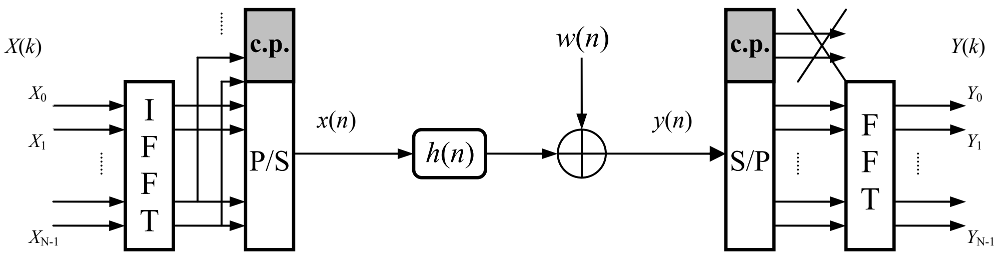
Σχήμα 1-4 Πομπός και δέκτης OFDM συστήματος υλοποιημένοι με IFFT-FFT.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της ακολουθίας $\{X_k\}$ δίνει ως έξοδο τις τιμές της ακολουθίας $\{x(n)\}$ ταυτόχρονα (παράλληλα). Προκειμένου να γίνει η μετατροπή του διακριτού σήματος σε συνεχές (D/A), οι τιμές $x(n)$ θα πρέπει να διέλθουν από το φίλτρο σειριακά και αυτή την διαδικασία εκφράζει ο συμβολισμός S/P (serial-to-parallel) στο σχήμα. Αντίστοιχα στον δέκτη προκειμένου να εφαρμοστεί ο FFT πρέπει οι τιμές $x(n)$ να είναι σε παράλληλη διάταξη.

1.1.2 Κυκλικό πρόθεμα

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι το μεγάλο πλεονέκτημα του OFDM σε σχέση με το FDM είναι η καλύτερη αξιοποίηση του διαθέσιμου εύρους ζώνης και η απλούστερη υλοποίηση του. Όμως το OFDM έχει και άλλα πλεονεκτήματα τα οποία αφορούν την ανοχή του συστήματος στην επίδραση του καναλιού που παρεμβάλλεται μεταξύ πομπού και δέκτη η οποία δεν εξετάστηκε μέχρι τώρα.

Στο σχήμα 1-5 φαίνεται το διακριτό OFDM σύστημα βασικής ζώνης το οποίο περιλαμβάνει την ύπαρξη καναλιού και θορύβου αλλά και την εισαγωγή κυκλικού προθέματος στο OFDM σύμβολο η λειτουργία του οποίου θα αναλυθεί παρακάτω.



Σχήμα 1-5 Διακριτό OFDM σύστημα βασικής ζώνης με χρήση κυκλικού προθέματος

Η επίδραση του καναλιού στο σύστημα περιγράφεται από την γραμμική συνέλιξη της διακριτής αναπαράστασης του OFDM σήματος (συμβόλου) με την διακριτή αναπαράσταση του καναλιού. Η διακριτή αναπαράσταση του καναλιού $\{h(n)\}$ θα θεωρηθεί ότι αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο FIR φίλτρο L σημείων. Επιπλέον ο αριθμός N των υπο-φέρουσων συχνοτήτων του συστήματος επιλέγεται να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό L. Είναι γνωστό πως η γραμμική συνέλιξη δύο διακριτών ακολουθιών, της $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ και της $\{h(n)\}_{n=0}^{L-1}$, δίνει μία καινούρια ακολουθία $\{y(n)\}_{n=0}^{N+L-2}$. Μαθηματικά η $\{y(n)\}$ δίνεται από την σχέση :

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l)\,x(n-l) \tag{1.10}$$

όπου ο συμβολισμός $*$ εκφράζει γραμμική συνέλιξη. Επομένως, θεωρώντας το πρώτο OFDM σύμβολο $x_1(n),\ 0 \le n \le N-1$, το αλλοιωμένο από το κανάλι OFDM σύμβολο που φτάνει στον δέκτη θα είναι το $y_1(n),\ 0 \le n \le N+L-2$. Δηλαδή, τα τελευταία $L-1$ σημεία του $y_1(n)$ θα συμπίπτουν με τα $L-1$ πρώτα σημεία του δεύτερου λαμβανομένου συμβόλου $y_2(n)$, $N \le n \le 2N+L-2$. Εμφανίζεται έτσι αλληλοπαρεμβολή μεταξύ των OFDM συμβόλων (inter-symbol-interference, ISI). Εφόσον ισχύει $N >> L$ η επίδραση της αλληλοπαρεμβολής γίνεται αμελητέα χωρίς την ανάγκη μετατροπής του συστήματος.

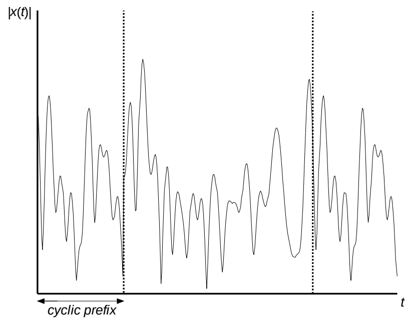
Στην πράξη για λόγους μείωσης της πολυπλοκότητας ο αριθμός N είναι συγκρίσιμος με τον αριθμό L, οπότε η αλληλοπαρεμβολή είναι σημαντική και προκαλεί μεγάλο ποσοστό σφάλματος. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος χρησιμοποιείται ένα διάστημα διαχωρισμού (guard interval) μεταξύ διαδοχικών OFDM συμβόλων στο οποίο δεν μεταφέρεται καμία πληροφορία. Έτσι τα τελευταία $L-1$ σημεία του προπορευόμενου OFDM συμβόλου αλληλεπιδρούν με τα σημεία του διαστήματος διαχωρισμού, χωρίς να επηρεάζεται το OFDM σύμβολο που ακολουθεί. Είναι προφανές ότι για να εξαλειφθεί πλήρως η αλληλοπαρεμβολή θα πρέπει το διάστημα διαχωρισμού να είναι τουλάχιστον $L-1$ σημείων. Με αυτόν τον τρόπο η αλληλοπαρεμβολή μεταξύ των συμβόλων αναιρείται πλήρως δίνοντας έτσι ένα σημαντικό πλεονέκτημα στο OFDM σε σχέση με τα συστήματα μίας φέρουσας συχνότητας, με κόστος την σπατάλη ενός μέρους του διαθέσιμου εύρους ζώνης. Στον δέκτη το διάστημα διαχωρισμού αγνοείται εφόσον δεν περιέχει καμία πληροφορία.

Αν και το διάστημα διαχωρισμού αποτρέπει την αλληλοπαρεμβολή μεταξύ διαδοχικών OFDM συμβόλων η επίδραση της γραμμικής συνέλιξης του OFDM συμβόλου με το κανάλι προκαλεί αναίρεση της ορθογωνιότητας των υπο-φέρουσων (inter-carrier-intereference, ICI), κάνοντας έτσι την ανίχνευση των συμβόλων $X(k)$ ιδιαίτερα δύσκολη [38]. Η επίδραση του καναλιού στο σήμα θα ήταν πιο απλή αν η συνέλιξη δεν ήταν γραμμική αλλά κυκλική. Σε μία τέτοια περίπτωση ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier του συμβόλου $y(n)$ θα ήταν ίσος με τον πολλαπλασιασμό των ακολουθιών $\{X(k)\}$ και $\{H(k)\}$, όπου $\{H(k)\}$ είναι ο DFT N-σημείων της κρουστικής απόκρισης του καναλιού και εκφράζει την συχνοτική του απόκριση δειγματοληπτημένη στις συχνότητες των υπο-φέρουσων του συστήματος. Επειδή η επίδραση του καναλιού στο OFDM σύμβολο είναι η γραμμική τους συνέλιξη, θα πρέπει με κάποιο τέχνασμα να ισοδυναμεί με κυκλική. Στην ανάλυση που ακολουθεί θα θεωρηθεί μόνο το πρώτο OFDM σύμβολο $x(n), 0 \le n \le N-1$. Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν είναι τα ίδια και για τα επόμενα σύμβολα.

Η γραμμική συνέλιξη δύο ακολουθιών ισοδυναμεί με κυκλική συνέλιξη N-σημείων στο διάστημα $[0, N-1]$, όταν η μία από τις δύο ακολουθίες είναι περιοδική με περίοδο ίση με N. Στην πράξη εφόσον η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη σε L σημεία, αρκεί το OFDM σύμβολο να επεκταθεί κυκλικά, τοποθετώντας στην αρχή του ένα αντίγραφο των τελευταίων $L-1$ σημείων του, δηλαδή τα σημεία $\{y(N-L+1), \dots, y(N-2), y(N-1)\}$. Τότε το σύμβολο θα έχει συνολικά $N+L-1$ σημεία και θα περιγράφεται από την σχέση :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \ -L+1 \le n \le N-1 \tag{1.11}$$

Επομένως τα μηδενικά σημεία του διαστήματος διαχωρισμού που προηγείται κάθε OFDM συμβόλου (συμπεριλαμβανομένου και του πρώτου) θα αντικατασταθούν με την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, και έτσι προκύπτει το κυκλικό πρόθεμα (cyclic prefix) (σχήμα 1-6). Η ύπαρξη του κυκλικού προθέματος μετατρέπει την γραμμική συνέλιξη σε κυκλική στο διάστημα $0 \le n \le N-1$. Εάν η διάρκεια του κυκλικού προθέματος είναι μεγαλύτερη από $L-1$ σημεία το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο, ενώ εάν είναι μικρότερη εκτός της εμφάνισης ISI μεταξύ διαδοχικών OFDM συμβόλων όπως αναφέρθηκε παραπάνω θα υπάρχει και ICI εφόσον η γραμμική συνέλιξη δεν θα ισοδυναμεί με κυκλική. Όπως και στην περίπτωση του διαστήματος διαχωρισμού, τα σημεία του κυκλικού προθέματος αγνοούνται από τον δέκτη εφόσον δεν περιέχουν καμία πληροφορία.



Σχήμα 1-6 Κυκλική επέκταση ενός OFDM συμβόλου στο συνεχή χρόνο

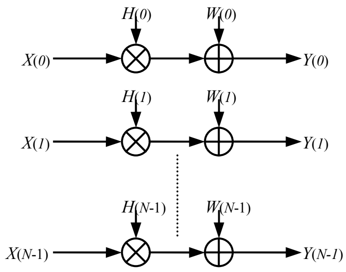
Με βάση τα παραπάνω και θεωρώντας την ύπαρξη προσθετικού λευκού κανονικού θορύβου $w(n)$ με στατιστική $E\{w(n)\}=0, E\{w(n_1)w^*(n_2)\}=\sigma_w^2\delta(n_1-n_2)$, το αλλοιωμένο από το κανάλι και από τον θόρυβο OFDM σύμβολο, αγνοώντας τα σημεία που αντιστοιχούν στο κυκλικό πρόθεμα θα δίνεται από την σχέση :

$$y(n)=\{x(n)\otimes h(n)\}(n)+w(n),\ 0\le n\le N-1 \tag{1.12}$$

όπου το σύμβολο $\otimes$ εκφράζει κυκλική συνέλιξη N-σημείων. Στον δέκτη η αποδιαμόρφωση του $y(n)$ γίνεται μέσω DFT, οπότε προκύπτει το σήμα $Y(k)$ το οποίο ισούται με

$$\begin{aligned} Y(k) &= \left(DFT\{x(n)\otimes h(n)+w(n)\}\right)(k) \\ &= \left(DFT\{x(n)\}\cdot DFT\{h(n)\}\right)(k)+\left(DFT\{w(n)\}\right)(k) \\ &= X(k)\cdot H(k)+W(k),\ 0\le n\le N-1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

όπου $W(k)$ είναι ο μετασχηματισμός DFT *N*-σημείων του θορύβου, ο οποίος αποτελείται από δείγματα κανονικής τυχαίας διαδικασίας με μέση τιμή $E\{W(k)\}=0$ και αυτοσυσχέτιση που προκύπτει ίση με $E\{W(k_1)W^*(k_2)\}=N\sigma_w^2\delta(k_1-k_2)$. Συνεπώς ο θόρυβος $W(k)$ είναι λευκός, με ισχύ $N\sigma_w^2$. Στο σχήμα 1-7 φαίνεται το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει από την (1.13) το οποίο αποτελείται από N συστήματα μίας φέρουσας συχνότητας σε κάθε ένα από τα οποία επιδρά κανάλι της μορφής $h_k=H(k)\delta(0)$ και θόρυβος $W(k)$.



Σχήμα 1-7 Ισοδύναμο σύστημα με το OFDM

Το σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από την όλη ανάλυση είναι η αποτελεσματικότητα με την οποία αντιμετωπίζει το OFDM ένα κανάλι με κρουστική απόκριση μεγάλης διάρκειας (multipath channel). Με την εισαγωγή του κυκλικού προθέματος το φαινόμενο της αλληλοπαρεμβολής μπορεί να εξαλειφθεί πλήρως μεταξύ διαδοχικών συμβόλων και ταυτόχρονα η επίδραση του καναλιού σε κάθε υπο-φέρουσα συχνότητα να μετατραπεί σε ένα απλό μιγαδικό πολλαπλασιαστικό παράγοντα κάνοντας έτσι εύκολη την εξίσωση καναλιού. Σημειώνεται ότι η ανάλυση έγινε θεωρώντας χρονικά αμετάβλητο (στατικό) κανάλι. Η περίπτωση μεταβαλλόμενου καναλιού θα εξεταστεί αργότερα.

1.2 Συγχρονισμός : απόκλιση συχνότητας – θόρυβος φάσης

Η σωστή λειτουργία του OFDM στηρίζεται στην ορθογωνιότητα των υπο-φέρουσων συχνοτήτων του συστήματος. Δύο αιτίες που προκαλούν αναίρεσή της είναι η απόκλιση συχνότητας (frequency offset) και ο θόρυβος φάσης (phase noise). Απόκλιση συχνότητας συμβαίνει όταν οι ταλαντωτές πομπού και δέκτη δεν είναι συγχρονισμένοι στην ίδια συχνότητα και μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από τον πολλαπλασιασμό του εισερχόμενου σήματος στο πεδίο του χρόνου με ένα μιγαδικό εκθετικό παράγοντα $FO(n) = \mathbf{exp}\{j2\pi f_0 n\}$ όπου f_0 η απόκλιση συχνότητας κανονικοποιημένη προς την απόσταση Δf μεταξύ διαδοχικών υπο-φέρουσων του OFDM συστήματος. Στο πεδίο της συχνότητας αυτό μεταφράζεται σε μετατόπιση του φάσματος κατά την συχνότητα αυτή. Θεωρώντας το πρώτο OFDM σύμβολο, ιδανικό κανάλι και μηδενικό θόρυβο η έξοδος του FFT στον δέκτη όταν υπάρχει απόκλιση συχνότητας δίνει την ακολουθία της (1.14) :

$$
\begin{aligned}
Y(k) &= DFT\left\{x(n)e^{j2\pi f_0 (N_{cp}+n)}\right\} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} X(r)e^{j2\pi f_0 N_{cp}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_0 n} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} \\
&= X(k)\frac{1}{N}e^{j2\pi f_0 N_{cp}}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_0 n} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{\substack{r=0 \\ r\neq k}}^{N-1} X(r)\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_0 n} e^{j\frac{2\pi}{N}(r-k)n}}_{ICI}, \ 0 \le k \le N-1
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

όπου N_{cp} ο αριθμός των σημείων του κυκλικού προθέματος. Η σχέση αυτή δείχνει ότι εκτός από ICI το οποίο για μεγάλο αριθμό υπο-φέρουσων μπορεί να θεωρηθεί ως κανονικός θόρυβος, η απόκλιση συχνότητας προκαλεί και μία κοινή στρέψη σε όλα τα σύμβολα $X(k)$. Για μηδενική απόκλιση ($f_0 = 0$) ο όρος του ICI μηδενίζεται και ο κοινός όρος στρέψης γίνεται ίσος με μονάδα.

Ο θόρυβος φάσης οφείλεται στην αδυναμία ενός πρακτικού ταλαντωτή να λειτουργεί ακριβώς σε μία συγκεκριμένη συχνότητα, εφόσον πάντα θα υπάρχει μία αστάθεια γύρω από αυτήν. Ισοδύναμα, η φασματική πυκνότητα ισχύος ενός ταλαντωτή δεν είναι μία δέλτα συνάρτηση στην επιθυμητή συχνότητα λειτουργίας του, αλλά έχει κάποιο εύρος, προκαλώντας στο σήμα μια παρασιτική διαμόρφωση χαμηλής συχνότητας. Μαθηματικά η επίδραση του θορύβου φάσης περιγράφεται με τον πολλαπλασιασμό του σήματος με τον μιγαδικό εκθετικό παράγοντα $PHN(n) = \mathbf{exp}(j\phi(n))$, όπου $\phi(n)$ είναι δείγματα μίας τυχαίας διαδικασίας με φάσμα ισχύος αυτό του ταλαντωτή. Σε αντιστοιχία με την (1.14) η επίδραση του θορύβου φάσης θεωρώντας ιδανικό κανάλι και μηδενικό θόρυβο δίνεται από την σχέση :

$$Y(k) = X(k)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\phi(n)} + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq k}}^{N-1} X(m)\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(m-k)} e^{j\phi(n)}}_{ICI}. \tag{1.15}$$

Όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος του φάσματος του ταλαντωτή τόσο μεγαλύτερη είναι και η επίδρασή του θορύβου φάσης. Σε σχέση με τα συστήματα με ένα φέρον η επίδραση του θορύβου φάσης είναι πολύ εντονότερη στο OFDM εφόσον το φάσμα κάθε υποφέρουσας συχνότητας είναι πολύ μικρότερο σε σχέση με το φάσμα που θα είχε ένα και μόνο φέρον που θα κατελάμβανε όλο το διαθέσιμο εύρος ζώνης. Αντίστοιχα και η επίδραση της απόκλισης φάσης είναι ισχυρότερη στο OFDM, κάνοντας έτσι απαραίτητη την ύπαρξη κατάλληλων αλγορίθμων στον δέκτη για την μείωση της επίδρασης των φαινομένων αυτών.

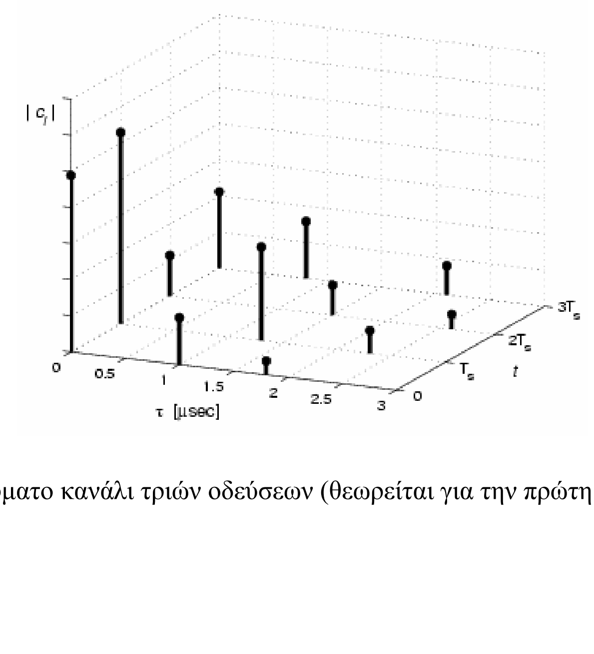
2. *Περιγραφή των Καναλιών*

2.1 Μοντελοποίηση των καναλιών

Στόχος ενός τηλεπικοινωνιακού συστήματος είναι η όσο το δυνατόν καλύτερη αντιμετώπιση της επίδρασης του καναλιού που παρεμβάλλεται μεταξύ πομπού και δέκτη προκειμένου να υπάρχει αξιόπιστη μετάδοση της πληροφορίας. Γενικά το κανάλι δεν είναι γνωστό, και για αυτό το λόγο γίνεται προσπάθεια εκτίμησής του με σκοπό την εξίσωσή του. Στη συνέχεια θα γίνει η περιγραφή των καναλιών που θα θεωρηθούν σε αυτό το κείμενο, και των στατιστικών μεγεθών που τα χαρακτηρίζουν.

Το σήμα που στέλνει ο πομπός στην ιδεατή περίπτωση φτάνει στον δέκτη μέσω μίας μόνο όδευσης (path). Στην πρακτική περίπτωση ενός ασύρματου καναλιού, το σήμα φτάνει στον δέκτη μέσω πολλών διαφορετικών οδεύσεων [1], με αποτέλεσμα την εμφάνιση αλληλοπαρεμβολής μεταξύ των εκπεμπόμενων συμβόλων (ISI) η οποία όπως αναφέρθηκε αντιμετωπίζεται στο OFDM με την εισαγωγή του κυκλικού προθέματος. Η χρονική καθυστέρηση της όδευσης l χαρακτηρίζεται από το μέγεθος τ_l που έχει διαστάσεις χρόνου, ενώ η επίδραση στο πλάτος και στην φάση του σήματος από το μιγαδικό μέγεθος c_l.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό του καναλιού είναι ότι μεταβάλλεται με τον χρόνο. Την χρονική στιγμή t, το κανάλι χαρακτηρίζεται από τα μεγέθη τ_l και c_l, ενώ την χρονική στιγμή t' από τα τ_l' και c_l' τα οποία είναι εν γένει διαφορετικά από τα αντίστοιχά τους την χρονική στιγμή t (σχήμα 2-1). Είναι επίσης δυνατόν ο αριθμός των οδεύσεων να αλλάζει με το χρόνο. Στη συνέχεια θα θεωρηθεί ότι ο αριθμός των διαδρομών παραμένει σταθερός η οποία είναι σωστή παραδοχή για μικρά χρονικά διαστήματα.



Σχήμα 2-1 Ασύρματο κανάλι τριών οδεύσεων (θεωρείται για την πρώτη όδευση $\tau_0(t) = 0$)

Με βάση τα παραπάνω, η κρουστική απόκριση ενός καναλιού μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά ως εξής:

$$h(t;\tau)=\sum_{l=0}^{L-1} c_l(t)\delta\left(\tau-\tau_l(t)\right), \tag{2.1}$$

όπου L είναι ο αριθμός των οδεύσεων και τα $\tau_l(t)$ παίρνουν συνεχείς τιμές σε ένα πεπερασμένο εύρος τιμών.

Οι τιμές των $c_l(t)$ θεωρούνται δείγματα μιγαδικής τυχαίας διαδικασίας η οποία θεωρείται στατική με την ευρεία έννοια (wide sense stationary), δηλαδή έχει σταθερή μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση που εξαρτάται μόνο από την διαφορά του χρόνου Δt [1], και περιγράφονται από την παρακάτω σχέση :

$$c_l(t)=c_l^{\mathrm{R}}(t)+j\cdot c_l^{\mathrm{I}}(t) \tag{2.2}$$

Τα $c_l^{\mathrm{R}}(t)$ και $c_l^{\mathrm{I}}(t)$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $c_l(t)$, τα οποία είναι ασυσχέτιστες τυχαίες διαδικασίες που χαρακτηρίζονται την τυχαία χρονική στιγμή t από την πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x_l)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left(\sigma_l/\sqrt{2}\right)}\mathbf{exp}\left\{-\frac{x_l^2}{2\left(\sigma_l/\sqrt{2}\right)^2}\right\}, \tag{2.3}$$

όπου η τυχαία μεταβλητή x_l αντιστοιχεί στις τυχαίες μεταβλητές c_l^{R} και c_l^{I}. Η (2.3) είναι η πυκνότητα πιθανότητας κανονικής κατανομής, μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς $\sigma_l^2/2$. Ισχύει δηλαδή $E\{c_l^{\mathrm{R}}(t)\}=E\{c_l^{\mathrm{I}}(t)\}=0$, άρα $E\{c_l(t)\}=0$. Επιπλέον η διασπορά των c_l^{R} και c_l^{I} έχει τεθεί ως $\sigma_l^2/2$ έτσι ώστε η διασπορά της μεταβλητής $c_l(t)$ να είναι ίση με $E\left\{\left|c_l(t)\right|^2\right\}=\sigma_l^2/2+\sigma_l^2/2=\sigma_l^2$ (εφόσον $E\left\{c_l^{\mathrm{R}}(\tau)\left(c_l^{\mathrm{I}}(t)\right)^*\right\}=0$).

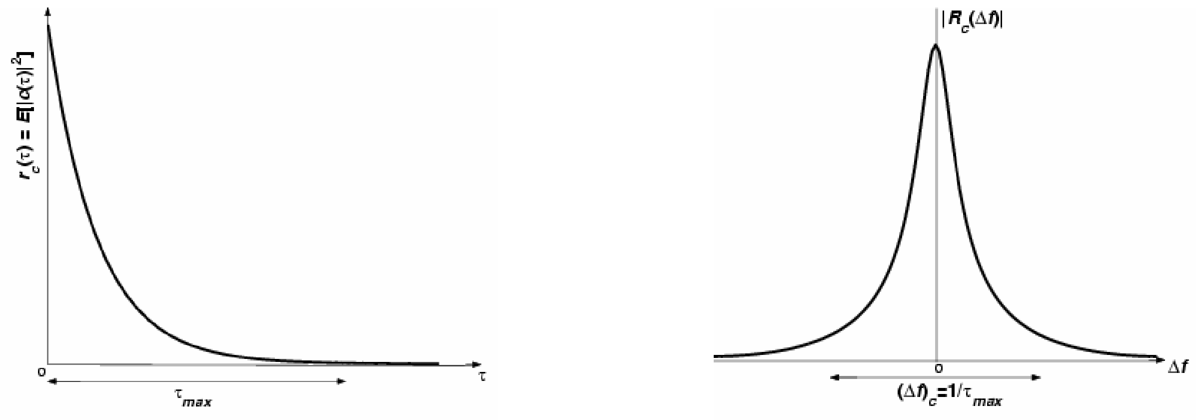
Αποδεικνύεται [3] ότι το μέτρο της μεταβλητής $c_l(t)$ όπως ορίσθηκε παραπάνω ακολουθεί την κατανομή Rayleigh στο διάστημα $[0,\infty]$, ενώ η φάση την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,2\pi]$. Ένα τέτοιο κανάλι αναφέρεται ως Rayleigh fading κανάλι. Η μηδενική μέση τιμή της μεταβλητής $c_l(t)$ εκφράζει την απουσία οπτικής διαδρομής (line of sight-LOS) μεταξύ πομπού και δέκτη. Στην περίπτωση που αυτή υπάρχει, η μέση τιμή των $c_l^{\mathrm{R}}, c_l^{\mathrm{I}}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός και το μέτρο της $c_l(t)$ ακολουθεί την κατανομή Rice [3]. Οι δύο παραπάνω στατιστικές είναι οι πιο συνηθισμένες στην μοντελοποίηση καναλιών. Στα επόμενα θα εξεταστεί κυρίως η περίπτωση του καναλιού που ακολουθεί την κατανομή Rayleigh.

Θεωρώντας ότι οι οδεύσεις είναι ασυσχέτιστες μεταξύ τους (ασυσχέτιστη διασπορά), η αυτοσυσχέτισή των $c_l(t)$ ισούται με [1] :

$$r_c(\Delta t;\tau_1,\tau_2)=E\left\{c(t;\tau_1)c^*(t+\Delta t;\tau_2)\right\}=\begin{cases} r_c(\Delta t;\tau_1) & ,\tau_1=\tau_2 \\ 0 & ,\tau_1\neq\tau_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός $c_l(t)=c(t;\tau_l)$. Η εξάρτηση της αυτοσυσχέτισης από την διαφορά Δt οφείλεται στην παραδοχή της στατικής με την ευρεία έννοια διαδικασίας ως προς τον χρόνο t.

Αν τεθεί $\Delta t=0$, τότε το μέγεθος $r_c(0;\tau)=E\{|c(\tau)|^2\}$ είναι μία συνάρτηση της συνεχής μεταβλητής τ, και εκφράζει την κατανομή της μέσης ισχύος του καναλιού ως προς την χρονική καθυστέρηση (power delay profile). Η μεγαλύτερη τιμή του τ για την οποία η $r_c(t)$ είναι διάφορη του μηδενός ονομάζεται μέγιστη καθυστέρηση (delay spread) και συμβολίζεται με $\tau_{\max}$ (σχήμα 2-2-1).



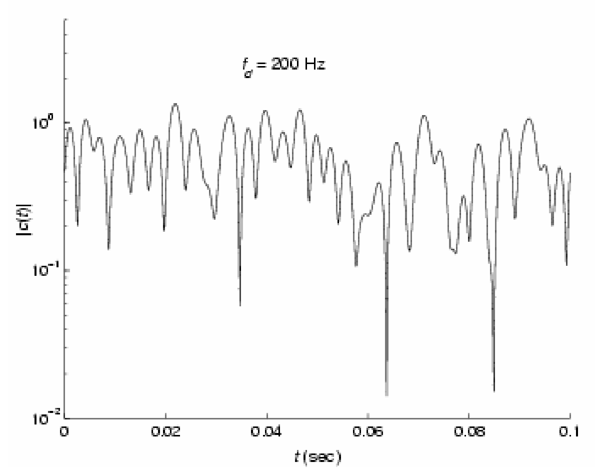
1 **2**

Σχήμα 2-2 1.Κατανομή ισχύος καναλιού, 2.Συνεχές εύρος ζώνης

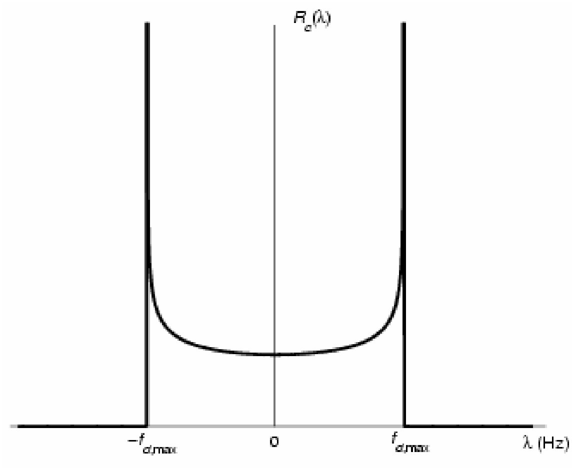
Ο μετασχηματισμός Fourier της $r_c(t)$ είναι η συνάρτηση $R_c(f_2-f_1)=R_c(\Delta f)=\int_{-\infty}^{+\infty} r_c(t)e^{-j2\pi\Delta f\tau}d\tau$ η οποία είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των οδεύσεων στο πεδίο της συχνότητας, και εξαρτάται από την διαφορά των συχνοτήτων Δf. Σημειώνεται ότι αν και στο πεδίο τ οι οδεύσεις είναι ασυσχέτιστες (σχέση (2.4)), δεν συμβαίνει το ίδιο στο πεδίο της συχνότητας. Το εύρος των συχνοτήτων στις οποίες η $R_c(\Delta f)$ είναι διάφορη του μηδενός ονομάζεται συνεχές εύρος ζώνης (coherence bandwidth) του καναλιού, $(\Delta f)_c$ (σχήμα 2-2-2). Το $(\Delta f)_c$ εκφράζει το εύρος των συχνοτήτων στο οποίο η συχνοτική απόκριση του καναλιού είναι πρακτικά σταθερή, που στην περίπτωση του OFDM σημαίνει ότι οι υπο-φέρουσες συχνότητες που βρίσκονται μέσα σε αυτό το όριο υφίστανται την ίδια παραμόρφωση. Όσο μεγαλύτερη είναι η μέγιστη καθυστέρηση $\tau_{\max}$, τόσο μικρότερο είναι και το συνεχές εύρος ζώνης του καναλιού, εφόσον η κρουστική απόκριση του καναλιού διαφέρει περισσότερο από το ιδεατό κανάλι το οποίο έχει άπειρο συνεχές εύρος ζώνης. Πρακτικά ισχύει $(\Delta f)_c \approx 1/\tau_{\max}$.

Τα δύο μεγέθη $\tau_{\max}$ και $(\Delta f)_c$ χαρακτηρίζουν το κανάλι ως προς την μεταβλητή τ και την αντίστοιχη της στη συχνότητα μεταβλητή f, για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t. Αν το κανάλι θεωρηθεί χρονικά αμετάβλητο αποτελούν την βασική πληροφορία της στατιστικής του καναλιού. Στην περίπτωση του OFDM συστήματος η γνώση του $\tau_{\max}$ καθορίζει την διάρκεια του κυκλικού προθέματος, ενώ γνώση του $(\Delta f)_c$ δίνει ένα μέτρο της μεταβολής της επίδρασης του καναλιού μεταξύ διαδοχικών υπο-φέρουσων του συστήματος και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ζητήματα όπως η κωδικοποίηση των συμβόλων και η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης.

Θέτοντας $\tau_1 = \tau_2 = 0$ στην (2.4), προκύπτει η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης των οδεύσεων ως προς τον χρόνο t, δηλαδή η $r_c(\Delta t;0) = r_c(\Delta t)$, η οποία δίνει ένα μέτρο της χρονικής μεταβολής του καναλιού και σε αντιστοιχία με τα παραπάνω ο μετασχηματισμός Fourier αυτής είναι η συνάρτηση $R_c(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} r_c(\Delta t) e^{-j2\pi\lambda\Delta t} d(\Delta t)$. Γενικά οι χρονικές μεταβολές του καναλιού οφείλονται στην σχετική κίνηση μεταξύ πομπού και δέκτη. Αποτέλεσμα αυτής της κίνησης είναι το φαινόμενο Doppler που προκαλεί διεύρυνση του φάσματος του σήματος και μετατόπισή του. Η μετατόπιση αυτή γίνεται κατά μία συχνότητα $\lambda_d \equiv f_d = (f_c \cdot u/c)\mathbf{cos}(a)$, όπου f_c είναι η συχνότητα του φέρον, u η σχετική ταχύτητα μεταξύ πομπού και δέκτη, c η ταχύτητα του φωτός και a η γωνία με την οποία φθάνει στον δέκτη το ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Προφανώς η μέγιστη συχνότητα Doppler θα είναι ίση με $f_{d,\mathbf{max}} = f_c \cdot u/c$. Το εύρος των συχνοτήτων λ για τις οποίες η $R_c(\lambda)$ είναι διάφορη του μηδενός (Doppler spread) συμβολίζεται ως B_d και ισχύει $B_d = 2f_{d,\mathbf{max}}$. Επιπλέον, το χρονικό διάστημα Δt όπου η $r_c(\Delta t)$ είναι διάφορη του μηδενός αποτελεί το συνεχές χρόνο του καναλιού $(\Delta t)_c$, που εκφράζει το χρονικό διάστημα στο οποίο η επίδραση του καναλιού παραμένει πρακτικά σταθερή και για το οποίο ισχύει $(\Delta t)_c \approx 1/B_d$. Ένα αργά μεταβαλλόμενο κανάλι έχει μεγάλο συνεχές χρόνο και μικρό B_d. Στο σχήμα 2-2-1 φαίνεται η χρονική μεταβολή του μέτρου $|c_l(t)|$ μίας όδευσης όταν η μέγιστη συχνότητα Doppler είναι ίση με $f_{d,\mathbf{max}} = 200\text{Hz}$, και η αντίστοιχη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $R_c(\lambda)$ αυτή του σχήματος 2-2-2. Γενικά, η μέγιστη συχνότητα Doppler καθορίζει την ταχύτητα μεταβολής της τιμής $c_l(t)$, ενώ η $R_c(\lambda)$ τον τρόπο.



1



2

Σχήμα 2-3 1. Χρονικά μεταβαλλόμενο κανάλι, 2. Αυτοσυσχέτιση του καναλιού στο πεδίο του χρόνου *t*.

2.2 Διακριτή αναπαράσταση της κρουστικής απόκρισης του καναλιού

Η σχέση (2.1) αποτελεί την μαθηματική περιγραφή του φυσικού μέσου που παρεμβάλλεται μεταξύ πομπού και δέκτη ενός ασύρματου τηλεπικοινωνιακού συστήματος στον συνεχή χρόνο. Εφόσον η περιγραφή και ανάλυση του OFDM είναι ευκολότερη στο διακριτό χρόνο είναι χρήσιμη η εύρεση της διακριτής περιγραφής του καναλιού.

Με βάση την ανάλυση του OFDM συστήματος στο κεφάλαιο 1, προκύπτει ότι για την μετάδοση του OFDM σήματος δεν υπάρχει ανάγκη χρήσης φίλτρων εκπομπής και λήψης. Πράγματι, η μετατροπή της διακριτής ακολουθίας $x(n)$ της (1.8) σε συνεχή μέσω διαδικασίας D/A, δίνει την ακολουθία (1.3) η οποία εκφράζει εκπομπή των διακριτών σύμβολων $X(k)$ με χρήση τετραγωνικού παλμού ως φίλτρο εκπομπής για κάθε k. Επιπλέον η διαδικασία στον δέκτη της δειγματοληψίας του λαμβανόμενου σήματος και της αποδιαμόρφωσής του μέσω FFT αντιστοιχεί στην χρήση προσαρμοσμένων φίλτρων στα φίλτρα εκπομπής. Συνεπώς ο συμβολισμός $h(n)$ στο σχήμα (1-5) αντιπροσωπεύει την διακριτή αναπαράσταση του φυσικού μέσου που παρεμβάλλεται μεταξύ πομπού και δέκτη. Σε αυτή την περίπτωση, από την μορφή του ασύρματου καναλιού της (2.1) προκύπτει ότι δεν είναι δυνατή η διακριτή περιγραφή του με βάση την περίοδο δειγματοληψίας T_s του συστήματος εφόσον γενικά η χρονική καθυστέρηση των οδεύσεων δεν συμπίπτει με αυτήν ή ακέραιο πολλαπλάσιό της.

Αναλυτικότερα, θεωρώντας την περίπτωση χρονικά αμετάβλητου καναλιού, το κανάλι περιγράφεται ως :

$$h(\tau)=\sum_l c_l \cdot \delta(\tau-\tau_l) \tag{2.5}$$

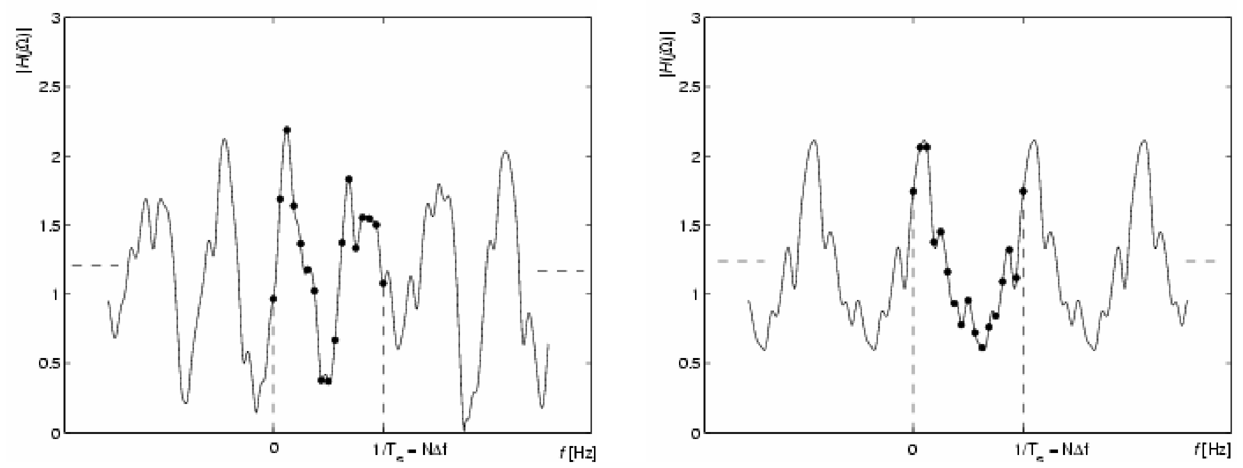
Ο μετασχηματισμός Fourier (συνεχούς χρόνου) της (2.5) είναι :

$$H_c(j2\pi f)=\sum_l c_l \cdot e^{-j2\pi f \tau_l} \tag{2.6}$$

Εφόσον η διάρκεια του κυκλικού προθέματος είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην υπάρχει αλληλοπαρεμβολή θα ισχύει η σχέση (1.13), η οποία απουσία θορύβου και με γνωστά τα σύμβολα $X(k)$, μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει την δειγματοληψία της συνεχής συχνοτικής απόκρισης $H_c(j2\pi f)$, στις N συχνότητες που αντιστοιχούν στις υπο-φέρουσες του συστήματος, στο εύρος συχνοτήτων $[0,\ 1/T_s]$, όπου $1/T_s$ είναι το εύρος ζώνης του συστήματος (σχήμα 2-4). Επομένως προκύπτει η διακριτή ακολουθία από τα δείγματα της συχνοτικής απόκρισης :

$$H(k)\equiv H_c\left(j2\pi k/(NT_s)\right)=\sum_l c_l \cdot e^{-j2\pi\tau_l k/(NT_s)},\ 0\le k\le N-1, \tag{2.7}$$

όπου $1/(NT_s)=\Delta f$ η απόσταση μεταξύ διαδοχικών υπο-φέρουσων του OFDM συστήματος.



1 2

Σχήμα 2-4 Δειγματοληπτημένες συχνοτικές αποκρίσεις δύο διαφορετικών καναλιών από το OFDM σύστημα.

Η αντίστοιχη διακριτή κρουστική απόκριση του καναλιού θα είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός (IDFT) του $H(k)$, δηλαδή :

$$
\begin{aligned}
h(n) &= \left(IDFT\{H(k)\}\right)(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l} c_l \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\frac{\tau_l}{T_s}}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\
&= \sum_{l} c_l \cdot g_l(n),\ 0 \le n \le N-1
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

όπου [34] :

$$
g_l(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}k\left(n-\frac{\tau_l}{T_s}\right)} = \begin{cases} \delta\left(n-\tau_l/T_s\right) & ,\ \tau_l/T_s \text{ : ακεραιος} \\ \dfrac{1}{N}\cdot\dfrac{\mathbf{sin}\left[\pi\left(n-\tau_l/T_s\right)\right]}{\mathbf{sin}\left[\pi\left(n-\tau_l/T_s\right)/N\right]}\cdot e^{j(N-1)\pi(1-\tau_l/T_s)/N} & ,\ \text{διαφορετικα} \end{cases} \tag{2.9}
$$

Από την (2.9) προκύπτουν δύο περιπτώσεις :

- *οι χρονικές καθυστερήσεις τ_l της* (2.5) <u>*δεν είναι*</u> *ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας του συστήματος T_s.*

  Στην περίπτωση αυτή το ισοδύναμο διακριτό κανάλι περιγράφεται από N σημεία διάφορα του μηδενός. Παρόλο που η περισσότερη ενέργεια κατανέμεται στα L πρώτα σημεία, που αντιστοιχούν στη μέγιστη καθυστέρηση του καναλιού $\tau_{\mathbf{max}} = (L-1)T_s$ στο πεδίο του συνεχούς χρόνου, υπάρχει σημαντική ενέργεια και στα υπόλοιπα $N-L$ (διαρροή ενέργειας). Από την (2.9) προκύπτει ότι $g_l(n) = g_l(n-N)$, που σημαίνει ότι η ενέργεια μιας διαδρομής με καθυστέρηση κοντά στο μηδέν θα κατανεμηθεί και στα σημεία $N-1$, $N-2$, …, με το σημείο $N-1$ να αποκτά την περισσότερη ενέργεια. Προφανώς τα σημεία της διακριτής κρουστικής απόκρισης έχουν συσχέτιση μεταξύ τους.

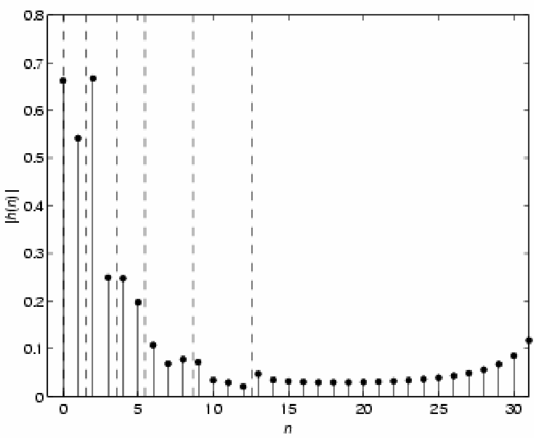
  Στο σχήμα 2-5-1 φαίνεται η διακριτή κρουστική απόκριση της δειγματοληπτημένης συχνοτικής απόκρισης του σχήματος 2-4-1 για $N = 32$ όπως και οι χρονικές καθυστερήσεις των οδεύσεων της πραγματικής συνεχής κρουστικής (διακεκομμένες γραμμές). Είναι φανερή η διαρροή της ενέργειας των οδεύσεων και στα N σημεία η οποία οφείλεται στην δειγματοληψία της συχνοτικής απόκρισης σε πεπερασμένο αριθμό N σημείων.

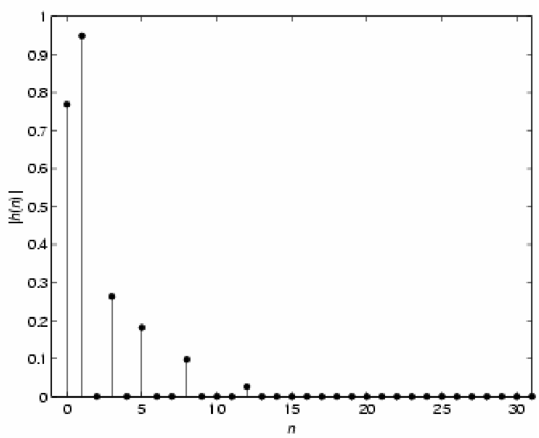
- *οι χρονικές καθυστερήσεις* τ_l *της* (2.5) <u>*είναι*</u> *ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας του συστήματος* T_s.

  Στην περίπτωση αυτή το συνεχές κανάλι της (2.5) συμπίπτει με το διακριτό FIR φίλτρο

$$h(n) = \sum_{l=0}^{L-1} c_l \cdot \delta(n-l) \tag{2.10}$$

όπου $(L-1)T_s = \tau_{\mathbf{max}}$. Για να προκύψει η (2.10) θα πρέπει η συχνοτική απόκριση να είναι περιοδική με περίοδο ίση με το εύρος ζώνης του OFDM σήματος όπως στην περίπτωση του σχήματος 2-3-2 . Η διακριτή FIR κρουστική απόκριση αυτής της συχνοτικής απόκρισης φαίνεται στο σχήμα 2-4-1 για την περίπτωση OFDM συστήματος με $N = 32$ υπό-φέρουσες.





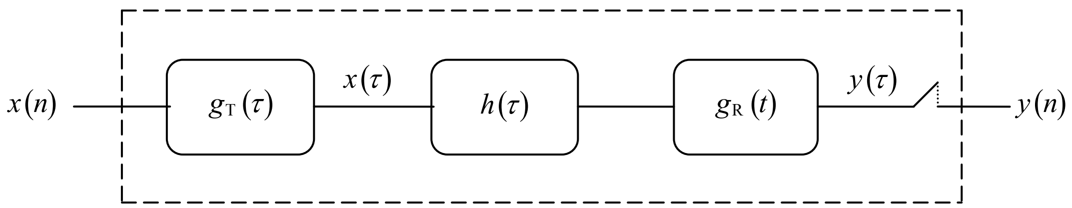
1 **2**

Σχήμα 2-5 Οι ισοδύναμες διακριτές κρουστικές αποκρίσεις των δειγματοληπτημένων συχνοτικών αποκρίσεων του σχήματος 2-4

Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται ότι δεν είναι δυνατή η ακριβής διακριτή περιγραφή του καναλιού σε πεπερασμένο αριθμό σημείων $L < N$ εφόσον γενικά η συχνοτική απόκριση του καναλιού δεν εμφανίζει περιοδικότητα (ισοδύναμα οι χρονικές καθυστερήσεις των οδεύσεων του καναλιού δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου δειγματοληψίας του συστήματος).

Μια άλλη προσέγγιση της OFDM διαμόρφωσης και αποδιαμόρφωσης είναι η εξής. Εάν θεωρηθεί ότι τα σημεία της διακριτής ακολουθίας $x(n)$ αποτελούν διακριτά σύμβολα (μη κβαντισμένα) θα πρέπει για την εκπομπή τους να χρησιμοποιηθεί ένα φίλτρο εκπομπής $g_{\mathrm{T}}(\tau)$. Το σήμα διέρχεται μέσω του καναλιού $h(\tau)$ της (2.5) και με χρήση φίλτρου λήψης $g_{\mathrm{R}}(\tau)$ προκύπτει το σήμα $y(\tau)$ το οποίο δειγματοληπτείται για να προκύψει η διακριτή ακολουθία $y(n)$ της (1.12) με την διαφορά ότι τώρα το κανάλι του συστήματος περιγράφεται από την σχέση $h_{tot}(\tau) = g_{\mathrm{T}}(\tau) * h(\tau) * g_{\mathrm{R}}(\tau)$ (σχήμα 2-6). Επειδή τα φίλτρα εκπομπής είναι συνεχείς παλμοί με χαρακτηριστική συχνοτήτων δύναμη συνημίτονου , το κανάλι παίρνει τιμές σε όλο το συνεχές διάστημα $[0, \tau_{\max}]$, όπου το μέγεθος $\tau_{\max}$ αντιστοιχεί στην μέγιστη διάρκεια της κρουστικής απόκρισης $h_{tot}(\tau)$ η οποία είναι διαφορετική από την αντίστοιχη της $h(\tau)$. Επομένως η διακριτή αναπαράσταση του καναλιού είναι δυνατή και θα ισούται με $h_{tot}(n) \equiv h_{tot}(nT_s)$, $0 \le n \le L-1$, όπου $L = \lfloor \tau_{\max}/T_s \rfloor + 1$ [1], [38]. Ο συμβολισμός $\lfloor x \rfloor$ εκφράζει τον αμέσως μικρότερο ακέραιο του δεκαδικού αριθμού x.

$$h_{tot}(n) = g_{\mathrm{T}}(\tau) * h(\tau) * g_{\mathrm{R}}(\tau)\Big|_{\tau = nT_s}$$



Σχήμα 2-6 Κρουστική απόκριση του OFDM συστήματος με χρήση φίλτρων εκπομπής και λήψης.

Στα επόμενα θα θεωρηθεί ότι το κανάλι του OFDM συστήματος περιγράφεται από ένα FIR φίλτρο, της μορφής της (2.10) του οποίου τα σημεία έχουν ίδια στατιστική με τις οδεύσεις του φυσικού μέσου που παρεμβάλλεται μεταξύ πομπού και δέκτη. Δηλαδή τα σημεία του φίλτρου μεταβάλλονται με το χρόνο ανάλογα με την μέγιστη ταχύτητα Doppler του συστήματος και επιπλέον είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους. Η τελευταία παραδοχή εν γένει δεν είναι σωστή εφόσον η ύπαρξη των φίλτρων εκπομπής και λήψης δημιουργεί συσχέτιση μεταξύ των σημείων της ισοδύναμης διακριτής κρουστικής απόκρισης [39], αλλά χρησιμοποιείται λόγω της απλούστερης μαθηματικής ανάλυσης που δίνει μία τέτοια θεώρηση.

2.3 Επίδραση του χρονικά μεταβαλλόμενου καναλιού στο OFDM

Ένα από τα πλεονεκτήματα του OFDM είναι η εξάλειψη της αλληλοπαρεμβολής των συμβόλων (ISI) και η απλή εξίσωση καναλιού. Όμως για να συμβεί αυτό θα πρέπει το κανάλι να είναι χρονικά αμετάβλητο ή στην χειρότερη περίπτωση μεταβαλλόμενο με τέτοιο ρυθμό ώστε να θεωρείται σταθερό κατά την διάρκεια ενός OFDM συμβόλου, συμπεριλαμβανομένης και της διάρκειας του κυκλικού προθέματος. Στη συνέχεια θα εξεταστεί αναλυτικά η επίδραση χρονικά μεταβαλλόμενου καναλιού το οποίο μεταβάλλεται ανά περίοδο δειγματοληψίας του συστήματος T_s.

Το OFDM σύμβολο μετά τον IFFT στον πομπό και την εισαγωγή του κυκλικού προθέματος περιγράφεται ως εξής :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad -L+1 \le n \le N-1 \tag{2.11}$$

όπου $X(k)$ το σύμβολο του k φέροντος, $x(n)$ η διακριτή αναπαράσταση του OFDM συμβόλου στο πεδίο του χρόνου, N ο αριθμός των φερόντων του συστήματος και $L-1$ ο αριθμός των δειγμάτων του κυκλικού προθέματος. Το ισοδύναμο διακριτό κανάλι θεωρείται ως ένα γραμμικό χρονικά μεταβαλλόμενο FIR φίλτρο αποτελούμενο από L σημεία το οποίο περιγράφεται από την σχέση :

$$h(n;l)=\sum_{l'=0}^{L-1}c_{l'}(n)\delta(l-l') \tag{2.12}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί γενίκευση της (2.10). Ο δείκτης $n=0,1,2,\ldots$, αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή nT_s, συνεπώς η παραπάνω σχέση περιγράφει ένα διακριτό κανάλι L σημείων των οποίων οι τιμές μεταβάλλονται κάθε χρονική στιγμή (ανά περίοδο δειγματοληψίας T_s του συστήματος). Επιπλέον η αυτοσυσχέτιση των σημείων $c_l(n)$ της κρουστικής απόκρισης της (2.12) ισούται σύμφωνα με την (2.4) με :

$$E\left\{c_{l_1}(n_1)c_{l_2}^*(n_2)\right\}=r_c(n_1-n_2;l_1,l_2)=r_t(n_1-n_2)\cdot r_\tau(l_1)\delta(l_1-l_2) \tag{2.13}$$

Ο διαχωρισμός της αυτοσυσχέτισης των $c_l(n)$ σε γινόμενο των συναρτήσεων αυτοσυχέτισης του χρόνου t και της χρονικής καθυστέρησης τ προκύπτει από την ανεξαρτησία της μεταβολής του καναλιού σε αυτά τα πεδία [23], [39].

Για την περίπτωση ασύρματων καναλιών η αυτοσυσχέτιση $r_t(\Delta t)$ στο πεδίο του συνεχούς χρόνου t περιγράφεται συνήθως από την σχέση [1] :

$$r_t(t_1-t_2)=J_0\left(2\pi f_{d,\max}(t_1-t_2)\right), \tag{2.14}$$

όπου J_0 είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους μηδενικού βαθμού. Ο μετασχηματισμός Fourier της (2.14) έχει την μορφή του σχήματος 2-2-2.

Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $r_\tau(\tau_l)$ στο συνεχές πεδίο της χρονικής καθυστέρησης τ εκφράζει την κατανομή της ισχύος των σημείων της κρουστικής απόκρισης (power delay profile). Συνήθως θεωρείται εκθετική κατανομή της ισχύος, της μορφής [17]:

$$r_\tau(\tau_l)=E\left\{\left|c(\tau_l)\right|^2\right\}=C\cdot\mathbf{exp}\left\{-\tau_l/\tau_{RMS}\right\} \tag{2.15}$$

Η σταθερά C επιλέγεται έτσι ώστε η ενέργεια της κρουστικής απόκρισης μία τυχαία χρονική στιγμή t να ισούται με $E\left\{|h(\tau)|^2\right\}=\sum_{l=0}^{L-1}E\left\{|c(\tau_l)|^2\right\}=1$. Η σταθερά τ_{RMS} καθορίζει το ρυθμό της πτώσης του εκθετικού.

Η επίδραση του καναλιού στο σήμα θα είναι η γραμμική συνέλιξη :

$$y(n)=\sum_{l=0}^{L-1}h(n;l)x_{OFDM}(n-l)+w(n) \tag{2.16}$$

όπου $x_{OFDM}(n)$ είναι το συνολικό OFDM σήμα και $w(n)$ είναι ο προσθετικός θόρυβος στο πεδίο του χρόνου. Εφόσον το κυκλικό πρόθεμα των OFDM συμβόλων αποτρέπει την αλληλεπίδραση μεταξύ τους (ISI), η παραπάνω σχέση αναλύεται ως εξής στο διάστημα $0 \le n \le N-1$:

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{L-1} h(n;l)\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(n-l)k} + w(n) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\sum_{l=0}^{L-1} h(n;l)e^{-j\frac{2\pi}{N}lk} + w(n) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Θέτοντας

$$H_k(n) = \sum_{l=0}^{L-1} h(n;l)e^{j\frac{2\pi}{N}lk} \tag{2.18}$$

που είναι ο DFT της κρουστικής απόκρισης την χρονική στιγμή nT_s, τελικά προκύπτει ότι το σήμα πριν την αποδιαμόρφωση μέσω του FFT στον δέκτη είναι ίσο με

$$y(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)H_k(n)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} + w(n),\ 0 \le n \le N-1 \tag{2.19}$$

Το αποδιαμορφωμένο σήμα $Y(k)$ θα είναι

$$\begin{aligned} Y(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k'=0}^{N-1} X(k')H_{k'}(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nk'}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + W(k) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k'=0}^{N-1} X(k')\sum_{n=0}^{N-1} H_{k'}(n)e^{j\frac{2\pi}{N}n(k'-k)} + W(k) \\ &= X(k)\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} H_k(n) + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{\substack{k'=0\\k'\neq k}}^{N-1} X(k)\sum_{n=0}^{N-1} H_{k'}(n)e^{j\frac{2\pi}{N}n(k'-k)}}_{ICI} + W(k),\ 0 \le k \le N-1 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Είναι εμφανής η αλληλοπαρεμβολή μεταξύ των υπο-φέρουσων που ανήκουν στο ίδιο OFDM σύμβολο (ICI), η οποία οφείλεται στην χρονική μεταβολή του καναλιού. Από την (2.20) προκύπτει ότι αν το κανάλι είναι σταθερό, οπότε η εξάρτηση των h και H_k στις (2.12) και (2.18) από το n δεν υπάρχει, ο όρος της αλληλοπαρεμβολής μηδενίζεται. Στην περίπτωση αυτή η (2.20) απλοποιείται στην :

$$Y_m(k) = X_m(k)H_m(k) + W_m(k),\ 0 \le k \le N-1, \tag{2.21}$$

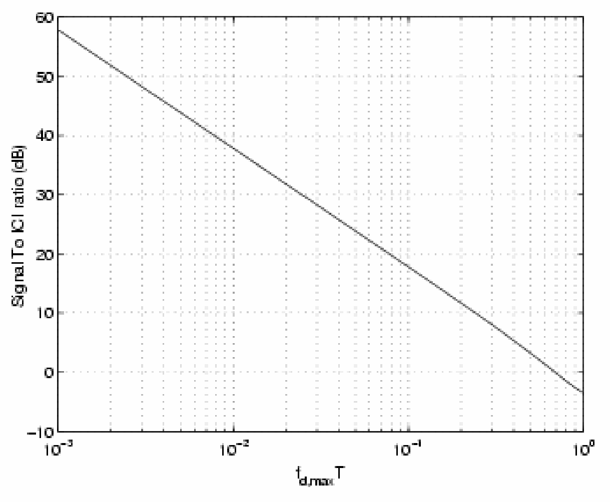
όπου $m = 1,2,\ldots$ είναι δείκτης του χρόνου, και αντιστοιχεί στο m OFDM σύμβολο.

Εφόσον ο αριθμός των υπο-φέρουσων του συστήματος είναι αρκετά μεγάλος, ο όρος του ICI της (2.20) μπορεί να θεωρηθεί ως μία κανονική τυχαία διαδικασία $ICI(k)$. Η ισχύς της αλληλοπαρεμβολής για κανάλι με την αυτοσυσχέτιση της (2.13) δίνεται από την σχέση [27], [29] :

$$E\left\{\left|ICI(k)\right|^2\right\} = \sum_{m=0,m\neq k}^{N_u-1}\left(N + 2\sum_{n=1}^{N-1}(N-n)J_0\left(2\pi f_{d,\max}T_s n\right)\mathbf{cos}\left(2\pi n(m-k)/N\right)\right), \qquad (2.22)$$

όπου N_u ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων υπο-φέρουσων του συστήματος. Από την (2.22) φαίνεται ότι η ισχύς του ICI είναι ανεξάρτητη της αυτοσυσχέτισης της κρουστικής απόκρισης ως προς την χρονική καθυστέρηση τ.

Η γραφική παράσταση του λόγου της ισχύος του σήματος προς την ισχύ του ICI συναρτήσει της κανονικοποιημένης μέγιστης Doppler συχνότητας $f_{d,\max}T$, όπου T είναι η χρονική διάρκεια ενός OFDM συμβόλου χωρίς το κυκλικό πρόθεμα ($T = NT_s$), φαίνεται στο σχήμα 2-7. Έχει θεωρηθεί σύστημα με $N = N_u = 128$, όπου N_u ο αριθμός των διαμορφωμένων υπο-φέρουσων του συστήματος. Η ισχύς του ICI είναι σχεδόν η ίδια για συστήματα με αρκετά μεγάλο αριθμό υπο-φέρουσων ($N \geq 64$) [27]. Επιπλέον στην περίπτωση που όλες οι υπο-φέρουσες είναι διαμορφωμένες η επίδραση του ICI είναι η ίδια σε όλες τις συχνότητες, σε αντίθεση με την περίπτωση όπου υπάρχουν αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες όπου τότε η ισχύς της αλληλεπίδρασης είναι μεγαλύτερη στις κεντρικές συχνότητες του συστήματος κατά 3dB περίπου.



Σχήμα 2-7 Λόγω σήματος προς ICI λόγω φαινομένου Doppler συναρτήσει της κανονικοποιημένης συχνότητας Doppler $f_{d,\max}T$

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι η αλληλοπαρεμβολή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα για τιμές της κανονικοποιημένης συχνότητας $f_{d,\max}T$ μέχρι 10^{-2} περίπου, όπου ο λόγος είναι περίπου 38 dB (εφόσον θεωρηθεί ότι το OFDM σύστημα θα λειτουργήσει σε συνθήκες $SNR \leq 38\text{dB}$, όπου SNR ο λόγος σήματος προς θόρυβο του συστήματος). Για αυτές τις συνθήκες ο θόρυβος αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα που προκαλεί παραμόρφωση στο σήμα και η σχέση (2.21) είναι μία ικανοποιητική προσέγγιση.

2.4 Υπολογισμός της αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης

Θεωρώντας ότι το κανάλι είναι σταθερό κατά την διάρκεια ενός OFDM συμβόλου οπότε ισχύει η (2.21), η γνώση της αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης είναι πολύ σημαντική για την εκτίμηση του καναλιού όπως θα αναφερθεί αργότερα. Στην συνέχεια θα υπολογιστεί η αυτοσυσχέτιση της συχνοτικής απόκρισης του συνεχούς καναλιού της (2.5). Γενικεύοντας την (2.7), η συχνοτική απόκριση του καναλιού κατά την διάρκεια του m OFDM συμβόλου είναι :

$$H_m(k) = H(m,k) = \sum_l c_l(m) e^{-j\frac{2\pi}{NT_s}\tau_l},\ 0 \le k \le N-1 \tag{2.23}$$

Η αυτοσυσχέτιση της $H(m,k)$ ορίζεται ως :

$$r_H(m_1 - m_2, k_1 - k_2) = E\left\{H(m_1,k_1)H^*(m_2,k_2)\right\} = E\left\{\sum_{l_1} c_{l_1}(m_1) e^{-j\frac{2\pi}{NT_s}\tau_{l_1}k_1} \sum_{l_2} c_{l_1}^*(m_2) e^{j\frac{2\pi}{NT_s}\tau_{l_2}k_2}\right\} \tag{2.24}$$

Έχοντας κάνει την παραδοχή για ασυσχέτιστη διασπορά, ισχύει για την ετεροσυσχέτιση των $c_l(m)$:

$$E\left\{c_{l_1}(m_1) c_{l_2}^*(m_2)\right\} = \sigma_{l_1}^2 \delta(l_1 - l_2) r_t(m_1 - m_2) \tag{2.25}$$

όπου σ_l^2 είναι η ισχύς της l όδευσης (μηδενικής μέσης τιμής) και $r_t(m_1 - m_2)$ η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης στο χρόνο όπως ορίσθηκε στην (2.14), η οποία συναρτήσει του μεγέθους m γράφεται ως:

$$r_t(m_1 - m_2) = J_0\left[2\pi f_{d,\max}(N + N_{cp}) T_s (m_1 - m_2)\right], \tag{2.26}$$

όπου $(N + N_{cp})T_s$ είναι η διάρκεια ενός OFDM συμβόλου συμπεριλαμβανομένης και της διάρκειας του κυκλικού προθέματος (N_{cp} : ο αριθμός των δειγμάτων του κυκλικού προθέματος στον διακριτό χρόνο). Επομένως η (2.24) γράφεται :

$$\begin{aligned} r_H(m_1 - m_2, k_1 - k_2) &= \sum_l \sigma_l^2 r_t(m_1 - m_2) E\left\{e^{-j\frac{2\pi}{NT_s}\tau_l(k_1-k_2)}\right\} = r_t(m_1 - m_2)\left(\sum_l \sigma_l^2 E\left\{e^{-j\frac{2\pi}{NT_s}\tau_l(k_1-k_2)}\right\}\right) \\ &= r_t(m_1 - m_2) \cdot r_f(k_1 - k_2) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ο τελεστής E μπαίνει μπροστά και από τον εκθετικό όρο αφού τα τ_l είναι τυχαίες μεταβλητές (ανεξάρτητες από τα αντίστοιχα μεγέθη c_l). Η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης αναλύεται σε γινόμενο δύο παραγόντων, με τον πρώτο να εκφράζει την αυτοσυσχέτιση της συχνοτικής απόκρισης στον χρόνο (πεδίο του m), και ο δεύτερος την αυτοσυσχέτιση στη συχνότητα (πεδίο του k).

Σημειώνεται ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης στο χρόνο t είναι ίδια με την αντίστοιχη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της κρουστικής απόκρισης, εφόσον η συχνοτική απόκριση αποτελεί μετασχηματισμό της κρουστικής απόκρισης στο πεδίο τ. Ο δεύτερος όρος της (2.27), η αυτοσυσχέτιση στο πεδίο της συχνότητας, υπολογίζεται ως εξής. Ισχύει :

$$E\left\{e^{-a\tau_l}\right\} = \int f_{\tau_l}\left(\tau_l\right) e^{-a\tau_l} d\tau_l \tag{2.28}$$

όπου $f_{\tau_l}(\tau_l)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της μεταβλητής τ_l και $a = j(2\pi/NT_s)(k_1 - k_2)$. Η γενικότερη περίπτωση είναι η χρονική καθυστέρηση τ_l της όδευσης l, να έχει ομοιόμορφη κατανομή στο χρονικό διάστημα $[0, T_{cp}]$, όπου $T_{cp} = N_{cp}T_s$ η χρονική διάρκεια του κυκλικού προθέματος του OFDM συμβόλου (θεωρώντας ότι για την μέγιστη καθυστέρηση $\tau_{\mathbf{max}}$ του καναλιού ισχύει $\tau_{\mathbf{max}} \le T_{cp}$) [17]. Δηλαδή,

$$f_{\tau_l}\left(\tau_l\right) = \begin{cases} 1/T_{cp} & , \tau_l \in \left[0, T_{cp}\right] \\ 0 & , \tau_l \notin \left[0, T_{cp}\right] \end{cases} \tag{2.29}$$

Θεωρώντας ότι η κατανομή της ισχύος στις οδεύσεις του καναλιού (power delay profile) περιγράφεται από την εκθετικής μορφής σχέση της (2.15), δηλαδή $\sigma_l^2 = C \cdot \mathbf{exp}\{-\tau_l/\tau_{RMS}\}$, η $r_f(k_1 - k_2)$ γίνεται :

$$\begin{aligned} r_f\left(k_1 - k_2\right) &= \sum_{l=0}^{L-1} \int_0^{T_{cp}} \frac{1}{T_{cp}} C e^{-\tau_l\left(\frac{1}{\tau_{RMS}} + a\right)} d\tau_l \\ &= \frac{CL}{T_{cp}} \cdot \frac{1 - \mathbf{exp}\left\{-T_{cp}\left[\left(1/\tau_{RMS}\right) + j2\pi\left(k_1 - k_2\right)/\left(NT_s\right)\right]\right\}}{\left(1/\tau_{RMS}\right) + j2\pi\left(k_1 - k_2\right)/\left(NT_s\right)} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Οι r_f και r_t είναι συναρτήσεις των διαφορών $k_1 - k_2$ και $m_1 - m_2$ αντίστοιχα, που είναι χαρακτηριστικό στατικής με την ευρεία έννοια διαδικασίας. Αν και η τιμή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης δεν παίζει μεγάλο ρόλο, αφού αυτό που ενδιαφέρει είναι η εξάρτησή της από τους παράγοντες $k_1 - k_2$ και $m_1 - m_2$, συνήθως γίνεται η κανονικοποίηση $r_f(0) = r_t(0) = 1$, που επιπλέον εκφράζει ισχύ της συνχοτικής απόκρισης ίση με μονάδα ($\sum_{l=0}^{L-1} \sigma_l^2 = 1$). Επομένως, κανονικοποιώντας τον σταθερό παράγοντα CL/T_{cp} της (2.30), προκύπτει η κανονικοποιημένη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της $H(k)$ [17]:

$$r_f\left(k_1 - k_2\right) = \frac{1 - \mathbf{exp}\left\{-T_{cp}\left[1/\tau_{RMS} + j2\pi\left(k_1 - k_2\right)/\left(NT_s\right)\right]\right\}}{\tau_{RMS}\left(1 - \mathbf{exp}\left(-T_{cp}/\tau_{RMS}\right)\right)\left(1/\tau_{RMS} + j2\pi\left(k_1 - k_2\right)/\left(NT_s\right)\right)}, \ \left|k_1 - k_2\right| \le N - 2 \tag{2.31}$$

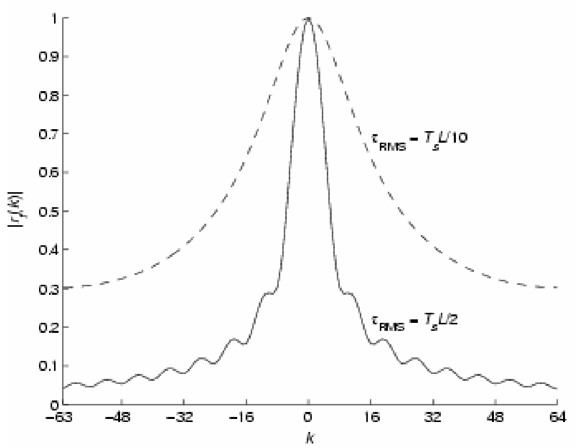
Στην περίπτωση που το κανάλι περιγράφεται από FIR φίλτρο L ασυσχέτιστων σημείων (2.10) η (2.23) γίνεται :

$$H(m,k)=\sum_{l=0}^{L-1}c_l(m)e^{-j\frac{2\pi}{N}lk},\ 0\le k\le N-1 \tag{2.32}$$

Η αυτόσυσχέτιση στην συχνότητα προκύπτει ότι ισούται με :

$$\begin{aligned} r_f(k_1-k_2) &= \sum_{l=0}^{L-1}\sigma_l^2 e^{-j\frac{2\pi}{N}(k_1-k_2)l} \\ &= \frac{1-\mathbf{exp}(-T_s/\tau_{RMS})}{1-\mathbf{exp}(-LT_s/\tau_{RMS})}\cdot\frac{1-\mathbf{exp}\{-L[T_s/\tau_{RMS}+j2\pi(k_1-k_2)/N]\}}{1-\mathbf{exp}\{-[T_s/\tau_{RMS}+j2\pi(k_1-k_2)/N]\}},\ |k_1-k_2|\le N-2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

με τον πρώτο παράγοντα για κανονικοποίηση. Είναι χαρακτηριστικό της (2.33) ότι $r_f(k)=r_f(N-k)$.



Σχήμα 2-8 Μέτρο της αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης σύμφωνα με την σχέση (2.33) για διαφορετικές τιμές της σταθεράς τ_{RMS}.

3. *Εκτίμηση και Εξίσωση Καναλιού*

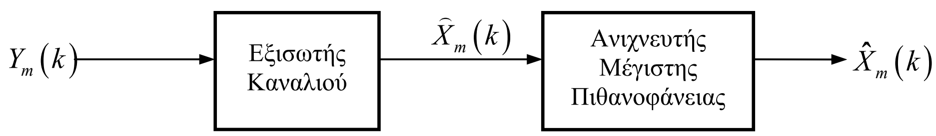
3.1 Εξίσωση καναλιού

Στα επόμενα θα θεωρηθεί ότι το κανάλι είναι τόσο αργά μεταβαλλόμενο ώστε στο πεδίο τιμών του SNR λειτουργίας του συστήματος η επίδραση του ICI λόγω φαινομένου Doppler να είναι αμελητέα και να ισχύει η γνωστή εξίσωση (2.21), η οποία γράφεται σε αναπαράσταση πινάκων :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_m &= D(\mathbf{X}_m)\mathbf{H}_m + \mathbf{W}_m \\ &= D(\mathbf{H}_m)\mathbf{X}_m + \mathbf{W}_m , \end{aligned} \tag{3.1}$$

όπου $\mathbf{Y}_m = [Y_m(0),\ldots,Y_m(N-1)]^T$, $\mathbf{X}_m = [X_m(0),\ldots,X_m(N-1)]^T$, $\mathbf{H}_m = [H_m(0),\ldots,H_m(N-1)]^T$ και $\mathbf{W}_m = [W_m(0),\ldots,W_m(N-1)]^T$. Με $(.)^T$ συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακας και με $D(.)$ ο διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία αυτά του διανύσματος της παρένθεσης.

Η διαδικασία εκτίμησης του συμβόλου $X_m(k)$ από το σύμβολο $Y_m(k)$ φαίνεται στο σχήμα 3-1. Το αλλοιωμένο από το κανάλι και τον θόρυβο σύμβολο $Y_m(k)$ διέρχεται από τον εξισωτή καναλιού η λειτουργία του οποίου είναι η αναίρεση της επίδρασης του καναλιού. Η έξοδος του δίνει μία προσωρινή εκτίμηση του συμβόλου $\widehat{X}_m(k)$, η οποία στην συνέχεια διέρχεται από τον ανιχνευτή μέγιστης πιθανόφάνειας για να προκύπτει η τελική εκτίμηση $\hat{X}_m(k)$ [1].



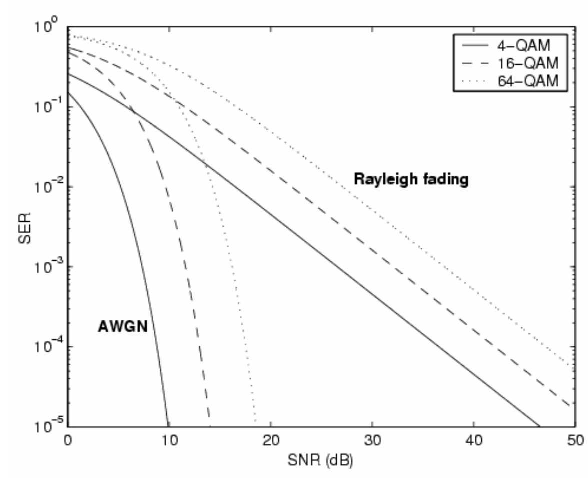
Σχήμα 3-1 Διαδικασία ανίχνευσης των δεδομένων στον δέκτη

Με την θεώρηση ότι η συχνοτική απόκριση είναι γνωστή στο δέκτη, η εξίσωση καναλιού μπορεί να γίνει με διαίρεση του $Y_m(k)$ με το $H_m(k)$ εφόσον η (2.21) είναι εξίσωση πρώτου βαθμού με άγνωστο το $X_m(k)$ (χωρίς να λαμβάνεται υπ’ όψιν ο θόρυβος). Θεωρώντας την δεύτερη ισότητα της (3.1) η εξίσωση του καναλιού περιγράφεται από την σχέση :

$$\widehat{\mathbf{X}}_m = D^{-1}\left(\mathbf{H}_m\right)\mathbf{Y}_m, \tag{3.2}$$

Όπου $\widehat{\mathbf{X}}_m = \left[\widehat{X}_m(0),\ldots,\widehat{X}_m(N-1)\right]^T$ και ο συμβολισμός $(.)^{-1}$ εκφράζει αντίστροφο πίνακα. Η εξίσωση καναλιού με αυτήν την διαδικασία ονομάζεται και εξίσωση επιλογής μηδενικών (zero forcing equalization), γιατί η επίδραση του καναλιού αναιρείται πλήρως. Για την περίπτωση όπου ο θόρυβος είναι κανονικός και λευκός η εξίσωση επιλογής μηδενικών της (3.2) συμπίπτει με την εξίσωση μέγιστης πιθανοφάνειας.

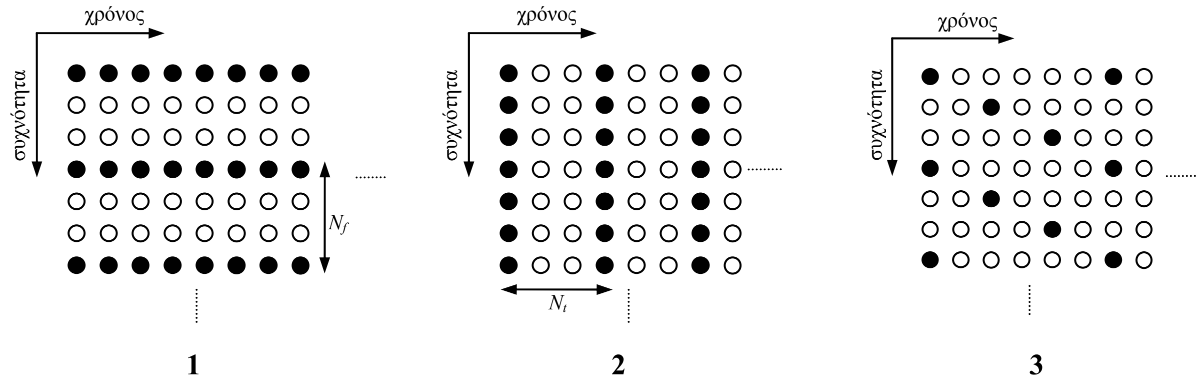
Το μειονέκτημα της εξίσωσης επιλογής μηδενικών είναι ότι στην περίπτωση που το $H_m(k)$ είναι πολύ μικρό, η διαίρεση του $Y_m(k)$ με αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα την υπερβολική αύξηση της ισχύος του θορύβου, κάνοντας έτσι μεγαλύτερη την πιθανότητα λανθασμένης ανίχνευσης.. Στο σχήμα 3-2 φαίνεται η πιθανότητα εσφαλμένης ανίχνευσης συμβόλου για την περίπτωση που το κανάλι (το οποίο είναι γνωστό στον δέκτη) ακολουθεί την Rayleigh στατιστική (καμπύλες Rayleigh fading στο σχήμα) [6], όπου είναι εμφανείς η μείωση της απόδοσης σε σχέση με το ιδεατό κανάλι $h(n) = \delta(0)$ (AWGN) [1].



Σχήμα 3-2 Πιθανότητα λανθασμένης ανίχνευσης QAM συμβόλου για ιδεατό και Rayleigh κανάλι

3.2 Εκτίμηση Καναλιού

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω για να γίνει η ανίχνευση μέγιστης πιθανοφάνειας του εισερχόμενου συμβόλου θα πρέπει να γίνει εξίσωση του καναλιού, το οποίο δεν είναι γνωστό και για αυτό το λόγο γίνεται εφαρμογή αλγορίθμων για τον προσδιορισμό του. Η πιο συνηθισμένη και απλή μέθοδος εκτίμησης καναλιού είναι η εκπομπή συμβόλων τα οποία είναι γνωστά στο δέκτη (πιλότοι) [7] με την βοήθεια των οποίων ο αλγόριθμος εκτίμησης καναλιού αποκτά την βασική πληροφορία από την οποία εξάγει την συχνοτική απόκριση (pilot symbol assisted modulation – PSAM). Το μειονέκτημα της χρήσης πιλότων, τα οποία μπορεί να είναι και ολόκληρα OFDM σύμβολα, είναι η σπατάλη ενέργειας και μέρους του διαθέσιμου εύρους ζώνης, κάνοντας έτσι πολύ σημαντικό το θέμα της πυκνότητας των πιλότων ανάμεσα στα δεδομένα αλλά και την κατανομή τους (σχήμα 3-3).



Σχήμα 3-3 Διάφορες κατανομές πιλότων (μαύρα σημεία) για την εκτίμηση καναλιού OFDM συστήματος

Εκτός από τους αλγόριθμους που κάνουν χρήση πιλότων έχουν προταθεί αλγόριθμοι τυφλής εκτίμησης καναλιού (blind channel estimation), στους οποίους δεν γίνεται χρήση πιλότων, αλλά με βάση τα εισερχόμενα σύμβολα υπολογίζονται στατιστικά μεγέθη από τα οποία με μαθηματική επεξεργασία προκύπτει η συχνοτική απόκριση του καναλιού [30-32]. Το μειονέκτημα τους είναι η μεγαλύτερη πολυπλοκότητα στην υλοποίησή τους σε σχέση με τους PSAM αλγόριθμους, και η μεγάλη καθυστέρηση της εκτίμησης εφόσον ο υπολογισμός των στατιστικών μεγεθών γίνεται παίρνοντας το μέσο όρο από ένα μεγάλο αριθμό συμβόλων ώστε τα αποτελέσματα να είναι στατιστικώς ακριβή. Οι αλγόριθμοι τυφλής εκτίμησης καναλιού δεν θα εξεταστούν.

3.3 Εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων

Στη συνέχεια θα θεωρηθεί ένα OFDM σύμβολο μέσω του οποίου μεταδίδονται γνωστά πιλοτικά σύμβολα, συνολικού αριθμού $N_p \le N$, στις πιλοτικές υπο-φέρουσες $\{k_{p1}, k_{p2}, \ldots, k_{pN_p}\} \subseteq \{0, \ldots, N-1\}$ με $k_{p1} \le k_{p2} \le \ldots \le k_{pN_p}$. Μετά την αποδιαμόρφωση του εισερχόμενου στον δέκτη σήματος μέσω του FFT θα ισχύει (παραλείποντας τον δείκτη m) :

$$\mathbf{Y}_p = D\left(\mathbf{X}_p\right)\mathbf{H}_p + \mathbf{W}_p \tag{3.3}$$

όπου $\mathbf{X}_p = \left[X(k_{p1}), \ldots, X(k_{pN_p})\right]^T$ το $N_p \times 1$ διάνυσμα των πιλότων, $\mathbf{Y}_p = \left[Y(k_{p1}), \ldots, Y(k_{pN_p})\right]^T$ τα αλλοιωμένα από το κανάλι και τον θόρυβο πιλοτικά σύμβολα, $\mathbf{H}_p = \left[H(k_{p1}), \ldots, H(k_{pN_p})\right]^T$ το διάνυσμα της συχνοτικής απόκρισης στις πιλοτικές συχνότητες και $W_p = \left[W(k_{p1}), \ldots, W(k_{pN_p})\right]^T$ το αντίστοιχο διάνυσμα του θορύβου. Στα επόμενα θα θεωρηθεί ότι τα πιλοτικά σύμβολα $X(k_p)$ προέρχονται από ένα αλφάβητο συμβόλων ίσης ενέργειας (όπως PSK σύμβολα). Η εξίσωση (3.3) αποτελεί ένα σύστημα N_p

γραμμικών εξισώσεων με άγνωστο το διάνυσμα της συχνοτικής απόκρισης. Η βέλτιστη λύση $\hat{\mathbf{H}}_p$ του συστήματος είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων (Least Squares – LS), η οποία ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα $\left\|\mathbf{Y}-D(\mathbf{X}_p)\hat{\mathbf{H}}_p\right\|^2$ [4], [33], όπου για το $n\times 1$ διάνυσμα $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\ldots x_n]^T$ ισχύει $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2$. Για το σύστημα της (3.3) προκύπτει ότι η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων της συχνοτικής απόκρισης ισούται με

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} &= D^{-1}\left(\mathbf{X}_p\right)\mathbf{Y}_p\\ &= \mathbf{H}_p + D^{-1}\left(\mathbf{X}_p\right)\mathbf{W}_p\\ &= \mathbf{H}_p + \mathbf{W}_{LS,p}\end{aligned} \tag{3.4}$$

όπου το διάνυσμα $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}=\left[\hat{H}_{LS}(k_{p1}),\hat{H}_{LS}(k_{p2}),\ldots,\hat{H}_{LS}(k_{pN_p})\right]^T$ αποτελείται από τις εκτιμήσεις των τιμών της συχνοτικής απόκρισης στις πιλοτικές υπο-φέρουσες και το διάνυσμα $\mathbf{W}_{LS,p}$ αποτελείται από δείγματα λευκού κανονικού θορύβου ισχύος $1/SNR$. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που ο θόρυβος του συστήματος είναι λευκός και κανονικός η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων συμπίπτει με την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας.

Από την (3.4) προκύπτει ότι η ακρίβεια της εκτίμησης εξαρτάται άμεσα από την ισχύ του θορύβου. Ως μέτρο της ακρίβειας χρησιμοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα το οποίο για την εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων ισούται με

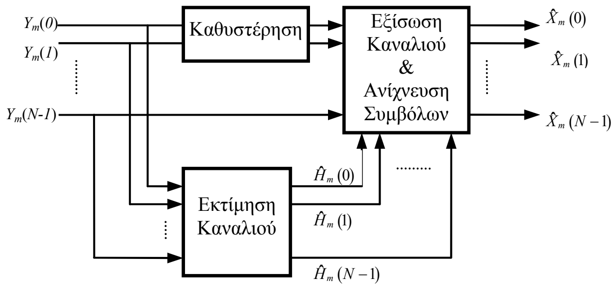
$$\begin{aligned}MSE_{LS} &= \frac{1}{N_p}E\left\{\left\|\mathbf{H}-\hat{\mathbf{H}}_{LS}\right\|^2\right\}=\frac{1}{N_p}E\left\{\left\|\mathbf{W}_{LS,p}\right\|^2\right\}\\ &= \frac{1}{SNR},\end{aligned} \tag{3.5}$$

δηλαδή το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης εξαρτάται από την ισχύ του θορύβου του συστήματος.

3.4 Αλγόριθμοι εκτίμησης καναλιού

Η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων αποτελεί την απλούστερη εκτίμηση που μπορεί να κάνει ο δέκτης και αποτελεί την αρχική πληροφορία για τους πιο πολύπλοκους και ακριβέστερους αλγόριθμους εκτίμησης καναλιού. Σημειώνεται ότι, σύμφωνα με την (3.4), για την LS εκτίμηση απαιτείται ένας μιγαδικός πολλαπλασιασμός για κάθε πιλοτική συχνότητα k_p. Η LS εκτίμηση μπορεί να αποτελεί και την τελική εκτίμηση του καναλιού εφόσον γίνεται σε όλες τις συχνότητες με χρήση ενός πιλοτικού OFDM συμβόλου όπου $N_p = N$. Ένα τέτοιο σύστημα που βασίζεται στην εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων, όπως στην περίπτωση όπου το κανάλι είναι στατικό και η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης γίνεται στην αρχή της μετάδοσης με χρήση ενός πιλοτικού OFDM συμβόλου [30], έχει απόδοση κατά 3dB χειρότερη από την ιδεατή περίπτωση τέλειας γνώσης του καναλιού από τον δέκτη [8]. Η απόδοση αυτή είναι συγκρίσιμη με ένα σύστημα διαφορικής διαμόρφωσης στο οποίο ο δέκτης δεν χρειάζεται ακριβής γνώση του καναλιού (non-coherent detection) [1]. Επομένως είναι αναγκαία η περαιτέρω επεξεργασία των αρχικών εκτιμήσεων για βελτίωση της ακρίβειάς τους ώστε το σύστημα να έχει καλύτερη απόδοση. Επιπλέον, σε συνθήκες όπου το κανάλι μεταβάλλεται γρήγορα και χρειάζεται να γίνεται διαρκώς ανανέωση της εκτίμησή του, επειδή δεν είναι δυνατόν όλα τα σύμβολα να είναι πιλοτικά, θα πρέπει ο υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης να γίνει με μεθόδους παρεμβολής (interpolation).

Το μπλοκ διάγραμμα της διαδικασίας εκτίμησης καναλιού φαίνεται στο σχήμα 3-4. Μετά τον FFT στο δέκτη, τα γνωστά πιλοτικά σύμβολα $Y(k_p)$ διέρχονται από τον εκτιμητή καναλιού, όπου γίνεται η αρχική εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων στις αντίστοιχες πιλοτικές συχνότητες και με τον επιλεγμένο αλγόριθμο προκύπτει η τελική εκτίμηση του καναλιού $\hat{H}(k)$ για όλες τις συχνότητες του συστήματος. Με βάση αυτήν την εκτίμηση γίνεται η εξίσωση καναλιού των $Y(k)$ και στην συνέχεια ο ανιχνευτής μέγιστης πιθανοφάνειας δίνει την τελική εκτίμηση των δεδομένων. Σημειώνεται ότι ο αριθμός των OFDM συμβόλων που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του καναλιού μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή μπορεί να είναι μεγαλύτερος του ενός οπότε είναι αναγκαία η εισαγωγή καθυστέρησης στο σύστημα.



Σχήμα 3-4 Διαδικασία εκτίμησης και εξίσωσης καναλιού στον δέκτη

Στον πίνακα I παρουσιάζονται συνοπτικά οι PSAM αλγόριθμοι εκτίμησης καναλιού που θα περιγραφούν στην συνέχεια. Οι αλγόριθμοι εκτίμησης καναλιού μπορούν να καταταχτούν σε αρκετές επιμέρους κατηγορίες, ανάλογα με το αν κάνουν χρήση πληροφορίας για την στατιστική του καναλιού και του θορύβου ή όχι, ή την επεξεργασία σήματος σε μία ή δύο διαστάσεις, ενώ μέτρο της απόδοσής τους αποτελούν παράμετροι όπως η ακρίβεια της εκτίμησης για δεδομένη κατανομή πιλότων, η πυκνότητα των πιλότων που απαιτείται για την επίτευξη συγκεκριμένης απόδοσης και η πολυπλοκότητα υλοποίησής τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ I

- Πολυωνυμική παρεμβολή
- IDFT-DFT Φίλτρο
- Φίλτρο Wiener (MMSE εκτίμηση)
- Απλοποίηση Wiener φίλτρου μέσω SVD
- Παρεμβολή μέσω IDFT-DFT
- Παρεμβολή μέσω IDFT-DFT με γνώση στατιστικής
- ML – MAP εκτίμηση
- Επεξεργασία σήματος στις δύο διαστάσεις

Γενικά, οι αλγόριθμοι που κάνουν χρήση της στατιστικής του καναλιού και του θορύβου του συστήματος έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια εκτίμησης, εφόσον η στατιστική αποτελεί επιπρόσθετη πληροφορία μαζί με αυτήν των αρχικών LS εκτιμήσεων. Στην πράξη όμως, η ακριβής γνώση των στατιστικών παραμέτρων του συστήματος δεν είναι εφικτή, ιδιαίτερα σε συνθήκες όπου αυτές μεταβάλλονται γρήγορα, κάνοντας έτσι σημαντικό το πρόβλημα της στατιστικής στην οποία θα προσαρμοστεί ο αλγόριθμος, το οποίο θα εξεταστεί παρακάτω. Αλλά και οι αλγόριθμοι που βασίζονται μόνο στις αρχικές LS εκτιμήσεις, χρησιμοποιούν μερική γνώση της στατιστικής του καναλιού που είναι η μέγιστη διάρκειά της κρουστικής απόκρισης. Εφόσον το OFDM σύστημα είναι σχεδιασμένο ώστε το κυκλικό πρόθεμα να αρκετής διάρκειας ώστε να μην υπάρχει αλληλοπαρεμβολή, μπορεί να θεωρηθεί η ως άνω όριο για την μέγιστη διάρκεια $\tau_{\max}$ της κρουστικής απόκρισης, η διάρκεια T_{cp} του κυκλικού προθέματος. Όπως θα δειχθεί στην συνέχεια η θεώρηση αυτή βελτιώνει σημαντικά την ακρίβεια της εκτίμησης.

Εφόσον το κανάλι είναι σταθερό κατά την διάρκεια ενός OFDM συμβόλου η πιο απλή διαδικασία εκτίμησης του καναλιού είναι η χρήση των LS εκτιμήσεων των πιλότων που μεταδίδονται μέσω του ίδιου OFDM συμβόλου και η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης σε όλες τις συχνότητες με παρεμβολή. Αυτή η διαδικασία εκτίμησης της συχνοτικής απόκρισης $H_m(k)$ με βάση την πληροφορία των πιλότων του m OFDM συμβόλου θα αναφέρεται στην συνέχεια ως εκτίμηση με επεξεργασία σήματος σε μία διάσταση, στην συγκεκριμένη περίπτωση την διάσταση της συχνότητας f. Στην περίπτωση που το κανάλι μεταβάλλεται τόσο γρήγορα, ακόμα και μεταξύ διαδοχικών συμβόλων, η χρήση αυτής της κατηγορίας αλγορίθμων απαιτεί την κατανομή πιλότων της μορφής του σχήματος 3-3-1 για την ανανέωση της εκτίμησης σε κάθε OFDM σύμβολο. Προφανώς η εκτίμηση με επεξεργασία σήματος σε μία διάσταση μπορεί να εφαρμοστεί και στην διάσταση του χρόνου t με μία κατανομή πιλότων όπως αυτή του σχήματος 3-3-2. Επειδή όμως στα πρακτικά OFDM συστήματα η μεταβολή της συχνοτικής απόκρισης στην διάσταση f είναι πολύ μεγαλύτερη από την μεταβολή στην διάσταση t, οι αλγόριθμοι εκτίμησης καναλιού εφαρμόζονται στην διάσταση f όπου η παρεμβολή είναι πιο δύσκολη.

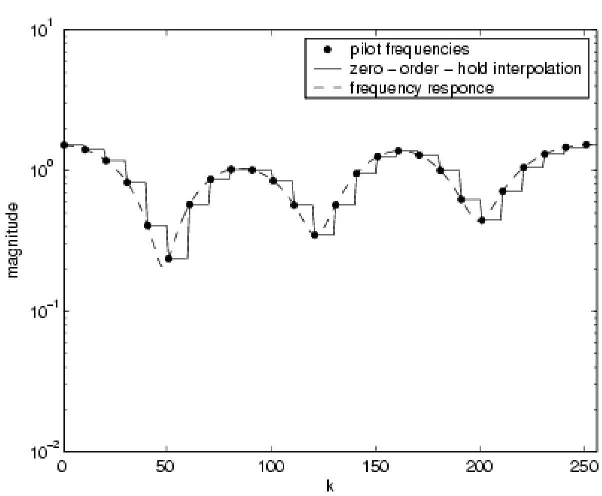
Ένα σημαντικό πρόβλημα των αλγόριθμων επεξεργασίας σήματος σε μία διάσταση είναι ότι η κατανομή πιλότων όπως αυτή του σχήματος 3-3-1 μειώνει αρκετά τον ρυθμό εκπομπής δεδομένων. Μείωση της πυκνότητας των πιλότων και της πολυπλοκότητας της εκτίμησης μπορεί να επιτευχθεί γενικεύοντας τους παραπάνω αλγόριθμους σε αλγορίθμους εκτίμησης καναλιού που βασίζονται στην επεξεργασία σήματος στις δύο διαστάσεις, f και t. Γενικά αυτή η κατηγορία αλγορίθμων δίνει την ίδια ακρίβεια εκτίμησης με μικρότερο αριθμό πιλότων σε σχέση με τους αλγόριθμους επεξεργασίας σήματος σε μία διάσταση. Αυτό συμβαίνει επειδή η θεώρηση της διάστασης t από τον αλγόριθμο σημαίνει (μερική ή ολική) γνώση της στατιστικής του στην διάσταση αυτή. Για παράδειγμα, εάν είναι γνωστό ότι το κανάλι μεταβάλλεται πολύ αργά, ο μέσος όρος των εκτιμήσεων του καναλιού που προέκυψαν σε κοντινά χρονικά διαστήματα αναμένεται να μειώσει το σφάλμα της εκτίμησης. Μία τυπική κατανομή πιλότων αυτής της κατηγορίας αλγορίθμων είναι αυτή του σχήματος 3-3-3. Σημειώνεται ότι με κατανομή αυτής της μορφής οι αλγόριθμοι επεξεργασίας σήματος σε μία διάσταση δεν μπορούν να δώσουν εκτίμηση για κάθε χρονική στιγμή, ενώ αντίθετα οι αλγόριθμοι δισδιάστατης επεξεργασίας σήματος μπορούν να δώσουν εκτίμηση για όλες τις χρονικές στιγμές με οποιαδήποτε κατανομή πιλότων, εφόσον αυτή ικανοποιεί ορισμένες προϋποθέσεις που θα εξεταστούν στην συνέχεια.

4. *Εκτίμηση Καναλιού με Επεξεργασία Σήματος σε Μία Διάσταση*

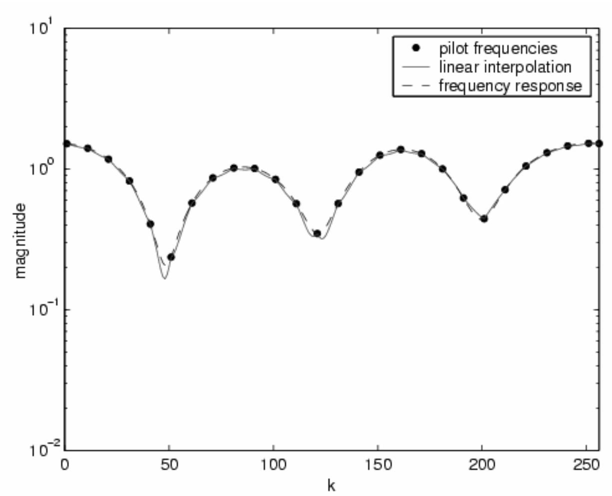
4.1 Πολυωνυμική παρεμβολή

Οι αλγόριθμοι πολυωνυμικής παρεμβολής αποτελούν τους απλούστερους αλγόριθμους εκτίμησης καναλιού και βασίζονται αποκλειστικά στις αρχικές LS εκτιμήσεις στις πιλοτικές υπο-φέρουσες. Θεωρώντας ένα OFDM σύμβολο και επιπλέον ότι η απόσταση των πιλοτικών συχνοτήτων είναι N_f (άρτιος αριθμός) (σχήμα 3-3-1), η πιο απλή μέθοδος παρεμβολής είναι η θεώρηση ότι η συχνοτική απόκριση είναι σταθερή μεταξύ δύο διαδοχικών πιλοτικών συχνοτήτων, ή οποία αποκαλείται παρεμβολή μηδενικής τάξης (zero-order-hold interpolation) [2], [9].

Στο σχήμα 4-1-1 φαίνεται η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης (το μέτρο) με την παραπάνω μέθοδο για την περίπτωση όπου οι LS εκτιμήσεις στις πιλοτικές συχνότητες έχουν ληφθεί απουσία θορύβου. Προφανώς η μέθοδος αυτή δεν δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα αφού η συχνοτική απόκριση ενός τυπικού καναλιού δεν ικανοποιεί την παραδοχή στην οποία βασίζεται η παρεμβολή. Στην πράξη λόγω ενθόρυβης αρχικής LS εκτίμησης, η τελική εκτίμηση θα είναι ακόμα χειρότερη.



1



2

Σχήμα 4-1 Εκτίμηση του μέτρου της συχνοτικής απόκρισης με πολυωνυμικές μεθόδους παρεμβολής (μηδενικής τάξεως και γραμμικής)

Η πιο συνηθισμένη πολυωνυμική παρεμβολή είναι η γραμμική παρεμβολή [2], [9-12], [27], στην οποία θεωρείται ότι η συχνοτική απόκριση μεταβάλλεται γραμμικά μεταξύ δύο διαδοχικών πιλοτικών συχνοτήτων. Συγκεκριμένα για την υπο-φέρουσα $k, rN_f \le k \le (r+1)N_f$, η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης θα δίνεται από την σχέση :

$$\hat{H}(k) = \hat{H}(rN_f + l) = \hat{H}_{LS}(rN_f) + \frac{l}{N_f}\left(\hat{H}_{LS}\left((r+1)N_f\right) + \hat{H}_{LS}(rN_f)\right),\ 0 \le l \le N_f \tag{4.1}$$

όπου $\hat{H}_{LS}(rN_f)$ και $\hat{H}_{LS}((r+1)N_f)$ είναι οι LS εκτιμήσεις στις πιλοτικές συχνότητες rN_f και $(r+1)N_f$ αντίστοιχα, r: ακέραιος. Στο σχήμα 4-1-2 φαίνεται η εκτίμηση με γραμμική παρεμβολή (linear interpolation) της συχνοτικής απόκρισης απουσία θορύβου, όπου είναι εμφανής η βελτίωσή της σε σχέση με την προηγούμενη μέθοδο. Επέκταση της γραμμικής παρεμβολής είναι η εκτίμηση της απόκρισης σε μία συχνότητα ως γραμμικός συνδυασμός των πλησιέστερων K_p πιλοτικών συχνοτήτων [11], δηλαδή της μορφής $\hat{H}(k) = \sum_{l \in P(k)} a_l \hat{H}_{LS}(l)$ όπου οι σταθερές a_l αποτελούν τα "βάρη" του συνδυασμού και $P(k) \subseteq \{k_{p_1}, \ldots, k_{p_{N_p}}\}$ είναι το σύνολο των K_p πιλοτικών συχνοτήτων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση στην υπο-φέρουσα k. Η γραμμική παρεμβολή είναι ειδική περίπτωση για $K_p = 2$. Οι τιμές των a_l μπορούν να επιλεχτούν με βάση απλά κριτήρια, αν και όπως θα αναφερθεί παρακάτω μπορούν να επιλεχτούν έτσι ώστε η εκτίμηση να είναι η καλύτερη δυνατή.

Η πιο ακριβής θεωρητικά αλλά και πιο πολύπλοκη μέθοδος πολυωνυμικής παρεμβολής είναι αυτή που προσεγγίζει τις τιμές της συχνοτικής απόκρισης στις ενδιάμεσες των πιλοτικών συχνότητες ως σημεία ενός πολυωνύμου τάξεως μεγαλύτερης ή ίσης του δύο [10-12]. Η πολυωνυμική παρεμβολή υψηλού βαθμού έχει γενικά καλύτερα αποτελέσματα αφού η πολυωνυμική προσέγγιση δίνει πιο ομαλές καμπύλες συχνοτικής απόκρισης. Θεωρητικά, όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη του πολυωνύμου τόσο ακριβέστερη αναμένεται να είναι και η εκτίμηση αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πολυπλοκότητά της.

Γενικά η εκτίμηση καναλιού με απλή παρεμβολή δίνει την χειρότερη εκτίμηση από όλους τους άλλους αλγόριθμους εκτίμησης καναλιού, εφόσον υπάρχει απόκλιση μεταξύ της μορφής της καμπύλης που θεωρείται ότι ακολουθεί η συχνοτική απόκριση από την πραγματική, και επιπλέον εξαρτάται άμεσα από τις ενθόρυβες LS εκτιμήσεις χωρίς καμία προσπάθεια μείωσης του θορύβου. Ιδιαίτερα στην περίπτωση που η συχνοτική απόκριση μεταβάλλεται έντονα κατά μήκος των συχνοτήτων, η ακρίβεια της εκτίμησης είναι περιορισμένη θέτοντας ένα κάτω όριο στην απόδοση του συστήματος (error floor) Σε ηπιότερες συνθήκες όπου η συχνοτική απόκριση είναι σχετικά ομαλή, η πολυωνυμική παρεμβολή μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αποτελέσματα αντίστοιχα πολυπλοκότερων αλγορίθμων, για μικρές τιμές του SNR [11]. Σημειώνεται ότι για την εφαρμογή της πολυωνυμικής παρεμβολής δεν απαιτείται γνώση της στατιστικής του καναλιού, συμπεριλαμβανομένης και της διάρκειας της κρουστικής απόκρισης.

4.2 Φίλτρα

Οι αλγόριθμοι παρεμβολής που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι εφαρμογή της μαθηματικής θεωρίας πολυωνυμικής παρεμβολής στην εκτίμηση του καναλιού χωρίς να γίνεται καθόλου επεξεργασία σήματος. Τα σημεία στα οποία βασίζεται η παρεμβολή έχουν αποκτηθεί μέσω της LS εκτίμησης τα οποία λόγω θορύβου είναι εσφαλμένα. Επιπλέον η παρεμβολή με τις παραπάνω μεθόδους απαιτεί πυκνή κατανομή πιλότων ώστε η μεταβολή της συχνοτικής απόκρισης ανάμεσά τους να είναι μικρή.

Για να περιορισθεί ο θόρυβος και να ελαττωθεί ο αριθμός των πιλοτικών συχνοτήτων εφαρμόζονται διαδικασίες επεξεργασίας σήματος που έχουν στόχο την μείωση της επίδρασης του θορύβου και την επίτευξη ακριβέστερης παρεμβολής. Είναι γνωστό ότι και οι δύο διαδικασίες μπορούν να πραγματοποιηθούν μέσω διέλευσης του σήματος (πεπερασμένου εύρους ζώνης) από κατάλληλα φίλτρα [2].

Εξετάζοντας το πρόβλημα της εκτίμησης καναλιού μέσα από την θεωρία επεξεργασίας σήματος, η όλη διαδικασία μπορεί να χωρισθεί σε τρεις επιμέρους κατηγορίες :

1. δειγματοληψία του σήματος (δειγματοληψία της συχνοτικής απόκρισης)
2. ανασύσταση του σήματος από τα δείγματά του
3. μείωση της επίδρασης του θορύβου

Η δεύτερη κατηγορία είναι ουσιαστικά το πρόβλημα της παρεμβολής αλλά με διαφορετική προσέγγιση από αυτήν των αλγορίθμων πολυωνυμικής παρεμβολής.

Η χρήση πιλότων ανάμεσα στα δεδομένα είναι ένας τρόπος δειγματοληψίας της συχνοτικής απόκρισης του καναλιού. Η πληροφορία της συχνοτικής απόκρισης $\hat{H}_{LS}(k_p)$ που αποκτά ο δέκτης στην k_p πιλοτική υπο-φέρουσα έχει σημασία μόνο εάν θεωρηθεί μαζί με τις εκτιμήσεις όλων των άλλων πιλοτικών υπο-φέρουσων, εφόσον όλες μαζί αποτελούν την δειγματοληπτημένη συχνοτική απόκριση από την οποία μπορεί να γίνει η ανασύστασή της σε όλες τις συχνότητες. Αντίθετα οι αλγόριθμοι πολυωνυμικής παρεμβολής κάνουν εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης σε μία συχνότητα με βάση τις πλησιέστερες σε αυτήν πιλοτικές υπο-φέρουσες. Εφόσον εξετάζεται η εκτίμηση του καναλιού μέσω της θεωρίας δειγματοληψίας οι πιλοτικές υπο-φέρουσες είναι λογικό να τοποθετούνται ομοιόμορφα ανάμεσα στο σύνολο των N υπο-φέρουσων του συστήματος ώστε να υπάρχει μία σταθερή περίοδος δειγματοληψίας. Σημειώνεται ότι οι αλγόριθμοι απλής παρεμβολής αν και μπορούν να υλοποιηθούν με οποιαδήποτε κατανομή πιλότων συνήθως χρησιμοποιείται και στην εφαρμογή τους ομοιόμορφη κατανομή, επειδή δεν υπάρχει κάτι που να υποδεικνύει το αντίθετο.

Η επαρκής δειγματοληψία ενός σήματος πεπερασμένου εύρους ζώνης επιβάλει κάποιους περιορισμούς στην συχνότητα με την οποία δειγματοληπτήται, που στην συγκεκριμένη περίπτωση σημαίνει περιορισμό της μέγιστης τιμής του N_f. Η ιδιαιτερότητα του προβλήματος της εκτίμησης καναλιού είναι ότι η δειγματοληψία του σήματος δεν γίνεται στο πεδίο του χρόνου αλλά στο πεδίο της συχνότητας. Λόγω όμως της δυικότητας του μετασχηματισμού Fourier το θεώρημα δειγματοληψίας μπορεί να εφαρμοστεί "αντιστρέφοντας" τα δύο πεδία, χρόνου και συχνότητας. Επομένως, η περίοδος δειγματοληψίας του σήματος είναι το μέγεθος $N_f \Delta f$, όπου Δf είναι η απόσταση των διαδοχικών υπο-φέρουσων του OFDM συστήματος, και η συχνότητα δειγματοληψίας το αντίστροφό αυτού, $1/\left(N_f \Delta f\right)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα δειγματοληψίας [2] το σήμα $x_c\left(t\right)$ πεπερασμένου εύρους ζώνης με φάσμα

$$X_c\left(j2\pi f\right)=0,\ \left|f\right|\geq f_0, \tag{4.2}$$

μπορεί να προσδιοριστεί από τα δείγματά του $x(n)\equiv x(nT_s),\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, εάν

$$f_s \geq 2f_0, \tag{4.3}$$

όπου T_s, f_s, f_0, η περίοδος δειγματοληψίας, η συχνότητα δειγματοληψίας και η μέγιστη συχνότητα του σήματος.

Στην περίπτωση της εκτίμησης καναλιού, το συνεχές σήμα του θεωρήματος αντιστοιχεί στην συχνοτική απόκριση $H_c\left(j2\pi f\right)$ του καναλιού και το πεπερασμένο του εύρους ζώνης του, αντιστοιχεί στην πεπερασμένη κρουστική απόκριση, $h(t)=0,\ t<0\ \ \&\ \ t>\tau_{\max}$. Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (4.2) προκύπτει ότι το μέγεθος $\tau_{\max}$ αντιστοιχεί στο δίπλευρο εύρος ζώνης του σήματος. Επομένως για να είναι δυνατή η ανασύσταση της συχνοτικής απόκρισης από τα δείγματα της $H\left(k\right)\equiv H_c\left(j2\pi k N_f \Delta f\right)$, θα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη [14], [15] :

$$\frac{1}{N_f \Delta f}\geq \tau_{\max} \Rightarrow N_f \leq \frac{1}{\Delta f\, \tau_{\max}} \tag{4.4}$$

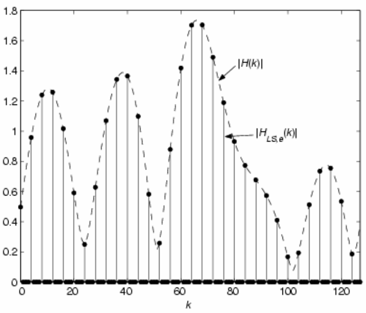
Αυτός είναι και ο περιορισμός που επιβάλλεται στην απόσταση των πιλοτικών υπο-φέρουσων προκειμένου να είναι δυνατή η ανασύσταση της συχνοτικής απόκρισης. Στην περίπτωση που το κανάλι περιγράφεται από διακριτό FIR φίλτρο L σημείων με $\left(L-1\right)T_s=\tau_{\max}$ (σχέση (2.10)) και χρησιμοποιώντας την σχέση $\Delta f=1/\left(NT_s\right)$ η παραπάνω σχέση απλοποιείται στην [13] :

$$N_f \leq \frac{N}{L} \tag{4.5}$$

Στην πράξη επειδή η διαδικασία της δειγματοληψίας γίνεται παρουσία θορύβου, η κατανομή των πιλοτικών συχνοτήτων είναι συνήθως πυκνότερη προκειμένου να μειωθεί η επίδρασή του όπως θα δειχθεί παρακάτω.

Εφόσον ικανοποιείται το θεώρημα δειγματοληψίας το επόμενα ζήτημα είναι η ανασύσταση του σήματος από τα δείγματά του. Από τις αρχικές LS εκτιμήσεις στις πιλοτικές συχνότητες προκύπτει η διακριτή ακολουθία $H_{LS,e}$ (σχήμα 4-2) η οποία περιγράφεται από την σχέση :

$$H_{LS,e}\left(k\right)=\begin{cases}\hat{H}_{LS}\left(k\right)=H\left(k\right)+W_{LS}\left(k\right), & k=0,N_f,2N_f,\ldots,\left(N_p-1\right)N_f\\ 0 & ,\ k\neq 0,N_f,2N_f,\ldots,\left(N_p-1\right)N_f\end{cases}\quad 0\leq k\leq N\text{-}1 \tag{4.6}$$



Σχήμα 4-2
Δειγματοληπτημένη συχνοτική απόκριση απουσία θορύβου.

Η προσέγγιση του θέματος της ανασύστασης του σήματος από τα δείγματά του γίνεται εξετάζοντας το σήμα στο πεδίο Fourier αυτού [2]. Στην συγκεκριμένη περίπτωση επειδή το σήμα είναι στο πεδίο της συχνότητας και επιπλέον αποτελεί μία διακριτή ακολουθία πεπερασμένου μήκους, διευκολύνει την ανάλυση η εξέταση του σήματος στο πεδίο του (διακριτού) χρόνου μέσω του αντίστροφου διακριτού μετασχηματισμού Fourier, IDFT. Ο IDFT της ακολουθίας $H_{LS,e}$ της (4.6) είναι

$$\begin{aligned}\left(IDFT\left\{H_{LS,e}\left(k\right)\right\}\right)\left(n\right) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H_{LS,e}\left(k\right) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N_p-1} \hat{H}_{LS}\left(rN_f\right) e^{j\frac{2\pi}{N/N_f}rn} \quad , \ 0 \le n \le N-1\end{aligned} \tag{4.7}$$

Ο λόγος N/N_f γενικά δεν είναι ακέραιος και δεν συμπίπτει με τον αριθμό των πιλότων N_p, με εξαίρεση την περίπτωση όπου ο N_p είναι δύναμη του 2 (θεωρώντας ότι το N του συστήματος είναι και αυτό δύναμη του δύο). Ισχύει δηλαδή $N/N_f = N_p + \varepsilon$, όπου ε είναι ένας δεκαδικός αριθμός . Με την προσέγγιση $\mathbf{exp}\{j2\pi rn/(N/N_f)\} = \mathbf{exp}\{j2\pi rn/(N_p+\varepsilon)\} \overset{\varepsilon \ll 1}{=} \mathbf{exp}\{j2\pi rn/N_p\}$, η (4.7) γράφεται

$$\left(IDFT\left\{H_{LS,e}\left(k\right)\right\}\right)\left(n\right) = \frac{N_p}{N}\cdot\frac{1}{N_p}\sum_{r=0}^{N_p-1} \hat{H}_{LS}\left(rN_f\right) e^{j\frac{2\pi}{N_p}rn} \quad , \ 0 \le n \le N-1 \tag{4.8}$$

Η (4.8) δείχνει ότι ο IDFT της δειγματοληπτημένης ακολουθίας είναι ο IDFT N_p-σημείων της ακολουθίας $\hat{H}(rN_f)$, $0 \le r \le N_p - 1$, επαναλαμβανόμενος N/N_p φορές στο διάστημα $0 \le n \le N-1$ και πολλαπλασιασμένος με μία σταθερά N_p/N . Δηλαδή

$$IDFT\left\{H_{LS,e}\left(k\right)\right\} = \frac{N_p}{N}\underbrace{\left[IDFT\left\{\hat{H}_{LS}\left(rN_f\right)\right\},\ldots,IDFT\left\{\hat{H}_{LS}\left(rN_f\right)\right\}\right]}_{N/N_p \text{ φορες}} \tag{4.9}$$

Η ακολουθία $\left\{\hat{H}_{LS}\left(rN_f\right)\right\}$ είναι ίση με $\hat{H}_{LS}(rN_f) = H(rN_f) + W_{LS}(rN_f)$, $0 \le r \le N_p - 1$, δηλαδή η πραγματική συχνοτική απόκριση στις υπο-φέρουσες rN_p, $0 \le r \le N_p - 1$, μαζί με λευκό θόρυβο ισχύος $1/SNR$ (σχέση (3.4)). Ο IDFT N_p-σημείων της είναι :

$$\left(IDFT\left\{H_{LS}\left(kN_f\right)\right\}\right)\left(n\right) = \underbrace{\frac{1}{N_p}\sum_{k=0}^{N_p-1} H\left(kN_f\right) e^{j\frac{2\pi}{N_p}kn}}_{h_{LS}(n)} + \underbrace{\frac{1}{N_p}\sum_{k=0}^{N_p-1} W_{LS}\left(kN_f\right) e^{j\frac{2\pi}{N_p}kn}}_{w_{LS}(n)} \quad , \ 0 \le n \le N_p - 1 \tag{4.10}$$

Ο πρώτος όρος του αθροίσματος ισούται με

$$\begin{aligned} h_{LS}(n) &= \frac{1}{N_p}\sum_{k=0}^{N_p-1}\left[\sum_{m=0}^{L-1} h(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kN_f m}\right] e^{j\frac{2\pi}{(N/N_f)}kn}, \ 0 \le n \le N_p - 1 \\ &= \frac{1}{N_p}\sum_{m=0}^{L-1} h(m) \sum_{k=0}^{N_p-1} e^{-j\frac{2\pi}{(N/N_f)}(m-n)k}, \ 0 \le n \le N_p - 1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $N/N_f = N_p$ η (4.11) γίνεται

$$\begin{aligned} h_{LS}(n) &= h(n) + \frac{1}{N_p}\sum_{\substack{m=0 \\ m\neq n}}^{L-1} h(m) \underbrace{\sum_{k=0}^{N_p-1} e^{-j\frac{2\pi}{N_p}(m-n)k}}_{=0}, \ 0 \le n \le N_p - 1 \\ &= h(n), \ 0 \le n \le N_p - 1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Δηλαδή ισούται με την πραγματική κρουστική συνάρτηση στα σημεία $0 \le n \le N_p - 1$. Εφόσον ικανοποιείται το θεώρημα δειγματοληψίας ο αριθμός των πιλότων N_p είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το μήκος L της διακριτής κρουστικής απόκρισης, οπότε δεν χάνεται πληροφορία για το κανάλι.

Ο δεύτερος όρος της (4.10) ισούται με παρόμοιους συλλογισμούς με

$$\begin{aligned} w_{LS}(n) &= \frac{1}{N_p}\sum_{k=0}^{N_p-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} w(m) e^{-j\frac{2\pi}{N}kN_f}\right] e^{-j\frac{2\pi}{N_p}kn}, \ 0 \le n \le N_p - 1 \\ &= \frac{1}{N_p}\sum_{m=0}^{N-1} w(m) \sum_{k=0}^{N_p-1} e^{-j\frac{2\pi}{N_p}(m-n)k}, \ 0 \le n \le N_p - 1 \end{aligned} \tag{4.13}$$

όπου $w(n)$ είναι ο λευκός κανονικός θόρυβος του συστήματος στο πεδίο του χρόνου με ισχύ σ_w^2. Η (4.13) δεν μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω όπως η (4.12) επειδή η μεταβλητή m παίρνει τιμές από μηδέν έως $N > N_p$. Εφόσον $w_{LS}(n)$ αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό κανονικού θορύβου η ακολουθία $\{w_{LS}(n)\}$ αποτελείται και αυτή από δείγματα κανονικού θορύβου [3] με μέση τιμή

$$E\{w_{LS}(n)\} = \frac{1}{N_p}\sum_{m=0}^{N-1} E\{w(n)\} \sum_{k=0}^{N_p-1} e^{-j\frac{2\pi}{N_p}(m-n)k} = 0 \tag{4.14}$$

και αυτοσυσχέτιση

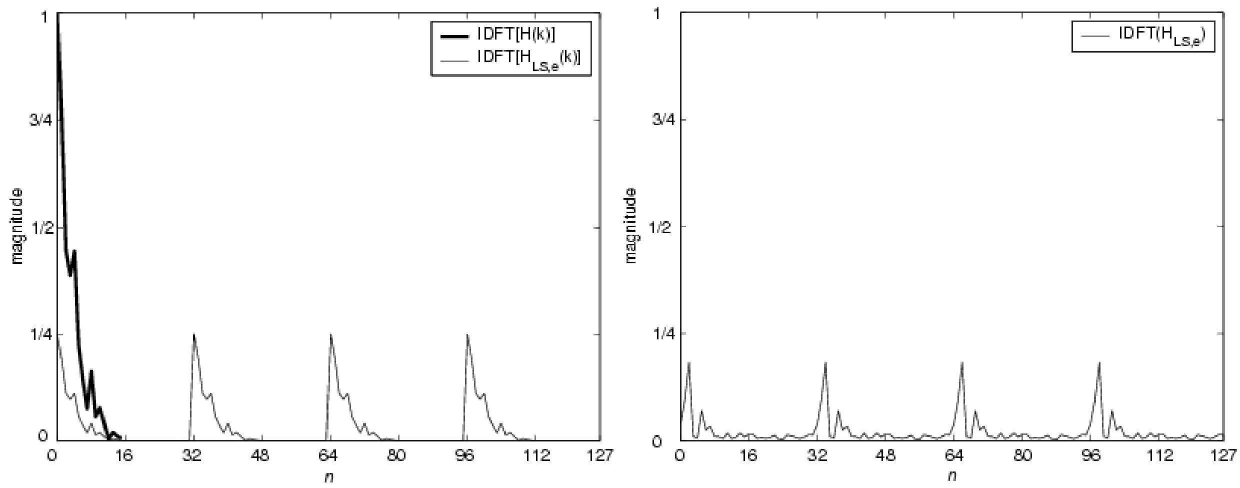
$$\begin{aligned} E\{w_{LS}(n_1) w_{LS}^*(n_2)\} &= \left(\frac{1}{N_p}\right)^2 E\left\{\sum_{m_1=0}^{N-1}\sum_{m_2=0}^{N-1} w(m_1) w^*(m_2) \sum_{k=0}^{N_p-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}k[(m_1-n_1)(m_2-n_2)]}\right\} \\ &\overset{m_1=m_2=m}{=} \left(\frac{1}{N_p}\right)^2 \sum_{m=0}^{N-1} \sigma_w^2 \sum_{k=0}^{N_p-1} e^{-j\frac{2\pi}{N_p}k(n_2-n_1)} = \left(\frac{1}{N_p}\right)^2 \sigma_w^2 \sum_{m=0}^{N-1} N_p \delta(n_1 - n_2) \\ &= \frac{N}{N_p}\sigma_w^2 \delta(n_1 - n_2) = \frac{1}{N_p \cdot SNR}\delta(n_1 - n_2) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Από την (4.15) προκύπτει ότι ο θόρυβος $\{w_{LS}(n)\}$ είναι λευκός με ισχύ $\sigma_{w_{LS}}^2 = 1/(N_p \cdot SNR)$ η οποία εξαρτάται από το πλήθος των πιλοτικών συχνοτήτων. Από τις (4.9)-(4.15) προκύπτει ότι ο IDFT της δειγματοληπτημένης συχνοτικής απόκρισης $\{H_{LS,e}(k)\}$, είναι η ακολουθία

$$IDFT\{H_{LS,e}(k)\} = \frac{N_p}{N}\left[\overbrace{\underbrace{h(n)+w_{LS}(n)}_{0\le n\le N_p-1},\ldots,h(n)+w_{LS}(n)}^{N_p \text{ φορες}}\right] \tag{4.16}$$

η οποία αποτελείται από N/N_p αντίγραφα της κρουστικής απόκρισης μαζί με λευκό θόρυβο ισχύος $\sigma_{w_{LS}}^2$ πολλαπλασιασμένα με τον παράγοντα N_p/N. Σημειώνεται ότι το παραπάνω αποτέλεσμα είναι απολύτως ακριβές στην περίπτωση όπου ο N_p είναι δύναμη του δύο οπότε η προσέγγιση $N/N_f \approx N_p$ ισχύει πραγματικά. Γενικά όταν $N/N_f \neq N_p$ η προσέγγιση δεν είναι ικανοποιητική στις περισσότερες περιπτώσεις ώστε τα αποτελέσματα που προέκυψαν παραπάνω να μην ισχύουν λόγω διαρροής ενέργειας του DFT στην σχέση (4.12). Σε αυτήν την περίπτωση η $h_{LS}(n)$ δεν αντιστοιχεί στην πραγματική κρουστική απόκριση αλλά είναι μία παραμορφωμένη εκδοχή της. Στη συνέχεια θα θεωρηθεί ότι $N/N_f = N_p$, που αντιστοιχεί στις περιπτώσεις όπου η απόσταση των πιλοτικών συχνοτήτων ισούται με $N_f = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots$.

Στο σχήμα 4-3-1 φαίνεται ο κανονικοποιημένος IDFT μιας τυπικής ακολουθίας $\{H_{LS,e}(k)\}$ η οποία προέκυψε από δειγματοληψία συχνοτικής απόκρισης με $N_f = 4$ απουσία θορύβου, μαζί με την πραγματική κρουστική απόκριση, ενώ το σχήμα 4-3-2 είναι το αντίστοιχο με ενθόρυβη δειγματοληψία. Επιπλέον είναι $N = 128,\ N_p = 32,\ L = 16$.



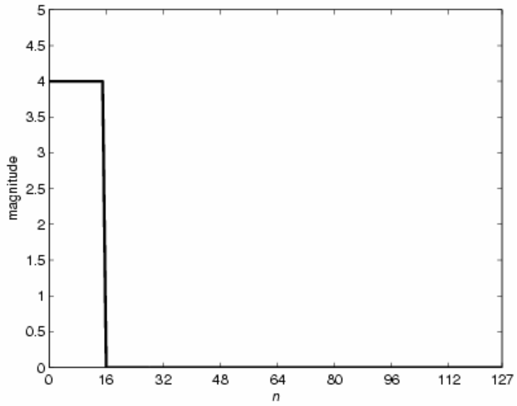
1 2

Σχήμα 4-3 IDFT δειγματοληπτημένης συχνοτικής απόκρισης.

Φαίνεται ότι ο IDFT της δειγματοληπτημένης συχνοτικής απόκρισης αποτελείται από την πραγματική κρουστική απόκριση, επαναλαμβανόμενη στο διάστημα [0, 127] $N/N_p = 4$ φορές, και με το πλάτος πολλαπλασιασμένο κατά ένα παράγοντα $N_p/N = 1/4$. Εφόσον η κρουστική απόκριση είναι πεπερασμένη σε $L < N_p$ σημεία, δεν υπάρχει επικάλυψη κάτι το οποίο θα συνέβαινε εάν δεν ικανοποιούταν το θεώρημα δειγματοληψίας. Για την ανασύσταση του σήματος πρέπει το "φάσμα βασικής ζώνης" να απομονωθεί από τα αντίγραφά του, και επιπλέον να πολλαπλασιαστεί το μέτρο του με τον παράγοντα N/N_p. Άρα το φίλτρο (στο πεδίο του χρόνου) θα περιγράφεται από την ακολουθία :

$$g(n) = \begin{cases} N/N_p, & 0 \le n \le L-1 \\ 0 & , n \ge L \end{cases} \tag{4.17}$$

και θα έχει την μορφή του σχήματος 4-4, για την συγκεκριμένη περίπτωση όπου $N/N_p = 4$,



Σχήμα 4-4 Αναπαράσταση του φίλτρου της (4.17) στο πεδίο του χρόνου. Το φίλτρο αποτελείται από διακριτά σημεία τα οποία στο σχήμα είναι ενωμένα με συνεχή γραμμή.

Σημειώνεται ότι ο αριθμός των διαφόρων του μηδενός σημείων του φίλτρου θα μπορούσε να είναι ίσος με N_p αφού και τότε θα ήταν δυνατή η ανασύσταση του σήματος εφόσον τα αντίγραφα της κρουστικής απόκρουσης αποκόπτονται από το φίλτρο. Όπως φαίνεται όμως στο σχήμα 4-3, η διέλευση από το φίλτρο των σημείων $L \le n \le N_p$ σημαίνει διέλευση επιπλέον ανεπιθύμητου θορύβου πέρα από αυτόν που ήδη υπάρχει στα πρώτα L σημεία. Επομένως η βέλτιστη απόδοση επιτυγχάνεται όταν το εύρος ζώνης του φίλτρου συμπίπτει ακριβώς με την διάρκεια της κρουστικής απόκρισης.

4.2.1 Υλοποίηση και πολυπλοκότητα

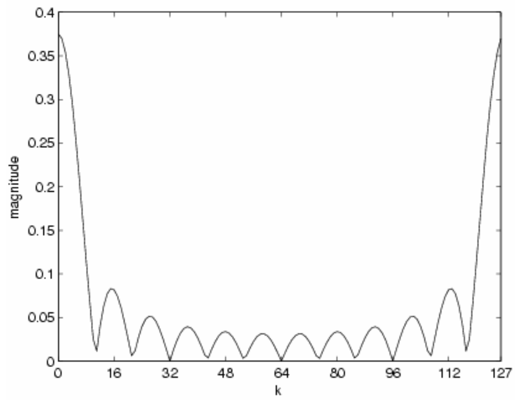
Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου δύο διακριτών ακολουθιών N-σημείων αντιστοιχεί σε κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών στο πεδίο της συχνότητας σύμφωνα με την γνωστή ιδιότητα του διακριτού μεταχηματισμού Fourier [2] :

$$Nx(n)y(n),\ 0 \le n \le N-1 \quad \leftrightarrow \quad X(k) \otimes Y(k),\ 0 \le k \le N-1 \tag{4.18}$$

όπου $x(n), y(n)$ διακριτές ακολουθίες N-σημείων και $X(k), Y(k)$ οι αντίστοιχοι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η ακολουθία $x(n)$ εκφράζει την αναπαράσταση της δειγματοληπτημένης συχνοτικής απόκρισης στο πεδίο του χρόνου (σχήμα 4-3) και η $y(n)=g(n)$ το φίλτρο με την μορφή του σχήματος 4-4. Επειδή ο όρος N συμπεριλαμβάνεται στο πολλαπλασιασμό των σημάτων στον χρόνο της (4.18), η (4.17) μετασχηματίζεται με τις μη μηδενικές τιμές του φίλτρου $y(n)=g(n)$ να είναι ίσες με $1/N_p$. Ο DFT N-σημείων του φίλτρου θα είναι

$$\begin{aligned} G(k) &= \left(DFT\{g(n)\}\right)(k) = \frac{1}{N_p}\sum_{l=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= \frac{1}{N_p}\cdot\frac{\mathbf{sin}(L\pi k/N)}{\mathbf{sin}(\pi k/N)}\cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}\left(\frac{L-1}{2}\right)},\ 0\le k\le N-1 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Στο σχήμα 4-5 φαίνεται το μέτρο του φίλτρου $|G(k)|$.

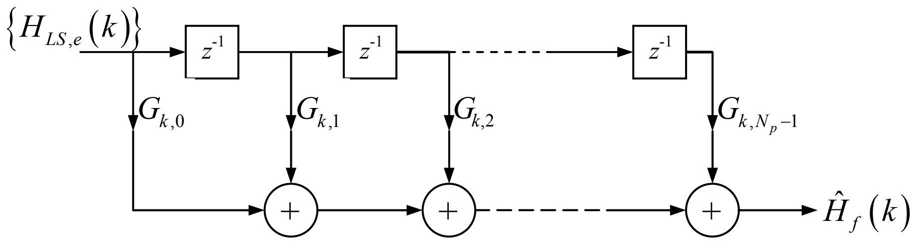


Σχήμα 4-5 Αναπαράσταση του φίλτρου της (4.19) στο πεδίο της συχνότητας. Το φίλτρο αποτελείται από διακριτά σημεία τα οποία στο σχήμα είναι ενωμένα με συνεχή γραμμή.

Η τελική εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης στο σημείο k, $\hat{H}_f(k)$, θα δίνεται από την σχέση

$$\hat{H}_f(k)=\{H_{LS,e}(k)\otimes G(k)\}(k)\ ,\ 0\le k\le N-1 \tag{4.20}$$

Η hardware υλοποίηση της κυκλικής συνέλιξης μπορεί να πραγματοποιηθεί με την χρήση φίλτρων της μορφής του σχήματος 4-6 για κάθε σημείο k της συχνοτικής απόκρισης.



Σχήμα 4-6 hardware υλοποίηση του φίλτρου της (4.20).

Οι τιμές των σημείων των φίλτρων για κάθε k προκύπτουν από την παρατήρηση ότι η κυκλική συνέλιξη των ακολουθιών $\{H_{LS,e}(k)\}$ και $\{G(k)\}$ περιγράφεται με χρήση πινάκων από την σχέση :

$$\hat{\mathbf{H}}_f = \begin{bmatrix} \hat{H}_f(0) \\ \hat{H}_f(1) \\ \vdots \\ \hat{H}_f(N-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G(0) & G(N-1) & G(N-2) \cdots & G(1) \\ G(1) & G(0) & G(N-1) \cdots & G(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ G(N-1) & G(N-2) & G(N-3) \cdots & G(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} H_{LS,e}(0) \\ H_{LS,e}(1) \\ \vdots \\ H_{LS,e}(N-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{LS,e}} \tag{4.21}$$

Από την μορφή της (4.21) φαίνεται ότι οι τιμές $G_{k,i}$, $0 \le k \le N-1$, $0 \le i \le N_p - 1$ των σημείων του k φίλτρου αντιστοιχούν στις τιμές της k γραμμής του πίνακα $\mathbf{G}$ και των στηλών που αντιστοιχούν στις N_p πιλοτικές συχνότητες. Συνεπώς χρειάζονται N φίλτρα τάξεως $N_p - 1$ για την τελική εκτίμηση με την διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω. Από πλευράς πολυπλοκότητας η διαδικασία της εκτίμησης του καναλιού και στις N συχνότητες του συστήματος απαιτεί $N \cdot N_p$ πολλαπλασιασμούς.

Εφόσον η παραπάνω ανάλυση βασίστηκε στην μεταφορά των ακολουθιών μεταξύ των δύο πεδίων Fourier είναι προφανές ότι η όλη διαδικασία μπορεί να υλοποιηθεί με απευθείας εφαρμογή των μετασχηματισμών IDFT – DFT ελαττώνοντας κατά πολύ την πολυπλοκότητα της εκτίμησης. Για αυτό το λόγο το φίλτρο που περιγράφηκε παραπάνω θα αναφέρεται στην συνέχεια ως IDFT-DFT φίλτρο. Η διαδικασία εκτίμησης καναλιού μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier θα εξεταστεί παρακάτω.

4.2.2 Απόδοση της εκτίμησης

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση η τελική εκτίμηση του καναλιού μετά την εφαρμογή του φίλτρου είναι ουσιαστικά ο DFT N-σημείων της ακολουθίας $h(n) + w_{LS}(n)$, $0 \le n \le L-1 \le N-1$, ο οποίος ισούται με $\hat{H}_f(k) = H(k) + W_f(k)$, $0 \le k \le N-1$. Ο θόρυβος που διέρχεται στο πεδίο του χρόνου μέσω του φίλτρου είναι λευκός και ισχύει όπως αναφέρθηκε παραπάνω :

$$E\left\{w_{LS}(n_1)\, w_{LS}^*(n_2)\right\} = \frac{1}{N_p SNR}\delta(n_1 - n_2) \tag{4.22}$$

Επομένως στο πεδίο της συχνότητας ο DFT αυτού, $W_f(k)$ θα έχει αυτοσυσχέτιση

$$\begin{aligned} E\left\{W_f(k_1)\, W_f^*(k_2)\right\} &= r_{W_f}(k_1 - k_2) = E\left\{\sum_{n_1=0}^{L-1}\sum_{n_2=0}^{L-1} w_{LS}(n_1)\, w_{LS}(n_2)\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n_1 k_1} e^{j\frac{2\pi}{N}n_2 k_2}\right\} \\ &\overset{(4.22)}{=} \frac{1}{N_p SNR}\sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k_1-k_2)} = \frac{1}{N_p SNR}\cdot\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}L(k_1-k_2)}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}(k_1-k_2)}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Από την (4.23) προκύπτει ότι ο θόρυβος της τελικής εκτίμησης είναι έγχρωμος. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης προφανώς θα εξαρτάται από την ισχύ του θορύβου και αναλυτικά υπολογίζεται θεωρώντας την σχέση

$$\hat{\mathbf{H}}_f = \mathbf{H} + \mathbf{W}_f \tag{4.24}$$

όπου $\hat{\mathbf{H}}_f = \left[\hat{H}_f(0),\ldots,\hat{H}_f(N-1)\right]^T$, $\mathbf{H} = \left[H(0),\ldots,H(N-1)\right]^T$, $\mathbf{W}_f = \left[W_f(0),\ldots,W_f(N-1)\right]^T$ τα $N \times 1$ διανύσματα που αντιστοιχούν στην τελική εκτίμηση του καναλιού, στο πραγματικό κανάλι και στον έγχρωμο θόρυβο αντίστοιχα. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης MSE_f είναι ο μέσος όρος του τετραγωνικού σφάλματος στα N σημεία της συχνοτικής απόκρισης και ισούται με

$$MSE_f = \frac{1}{N} E\left\{\left\|\mathbf{H} - \mathbf{H}_f\right\|^2\right\} \tag{4.25}$$

Η (4.25) μαθηματικά ισούται με

$$\begin{aligned} MSE_f &= \frac{1}{N} E\left\{\left\|\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_f\right\|^2\right\} \\ &= \frac{1}{N} trace\left[E\left\{\left|\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_f\right|^2\right\}\right] = \frac{1}{N} trace\left[E\left\{\left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_f\right)\left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_f\right)^H\right\}\right] \\ &= \frac{1}{N} E\left\{\left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_f\right)^H \left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_f\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.26}$$

όπου ο συμβολισμός $(.)^H$ εκφράζει ερμητιανό πίνακα και $trace[.]$ το ίχνος του πίνακα. Χρησιμοποιώντας την δεύτερη ισότητα της (4.26) προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned} MSE_f &= \frac{1}{N} trace\left[E\left\{\mathbf{W}_f \mathbf{W}_f^H\right\}\right] = \frac{1}{N} trace\left(\begin{bmatrix} r_{W_f}(0) & r_{W_f}(-1) & \cdots & r_{W_f}(-N+1) \\ r_{W_f}(1) & r_{W_f}(0) & \cdots & r_{W_f}(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{W_f}(N-1) & r_{W_f}(N-2) & \cdots & r_{W_f}(0) \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{N} N \cdot r_{W_f}(0) = r_{W_f}(0) = \frac{L}{N_p \cdot SNR} \end{aligned} \tag{4.27}$$

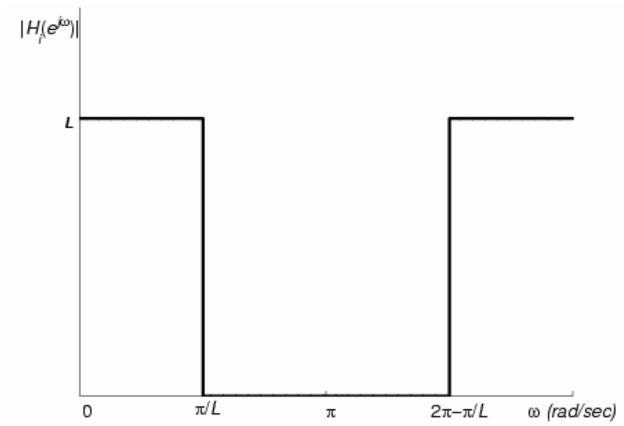
όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (4.23). Από την (4.27) φαίνεται ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης εξαρτάται από το μήκος L της κρουστικής απόκλισης του καναλιού και από το πλήθος των πιλοτικών συχνοτήτων. Η καλύτερη δυνατή εκτίμηση γίνεται στην περίπτωση όπου $N_p = N$, ενώ για $N_p = L$ η εκτίμηση είναι της ίδιας ακρίβειας με την LS εκτίμηση, με τη διαφορά ότι η τελευταία χρειάζεται όλες οι υπο-φέρουσες να είναι πιλοτικές. Στην περίπτωση όπου η διάρκεια του καναλιού δεν είναι γνωστή ακριβώς μπορεί να θεωρηθεί ο αριθμός N_{cp} των σημείων του κυκλικού προθέματος οπότε η τιμή L της σχέσης (4.27) θα αντικατασταθεί από την τιμή N_{cp}. Εφόσον $N_{cp} > L$ η ακρίβεια της εκτίμησης θα είναι μικρότερη.

4.3 Φίλτρο ιδεατής παρεμβολής

Μία άλλη μέθοδος παρεμβολής διακριτής ακολουθίας που προέκυψε από την δειγματοληψία συνεχούς σήματος $x_c(t)$ πεπερασμένου εύρους ζώνης είναι η χρήση φίλτρου ιδεατής παρεμβολής (ideal interpolator) [2], [18], [22]. Το φίλτρο μετατρέπει μία ακολουθία $\{x(n)\} \equiv \{x_c(nT)\}$ στην ακολουθία $\{x_i(n)\} \equiv \{x_c(nT')\}$ όπου $T' = T/L_i$, L_i : ακέραιος, για την οποία ισχύει $x_i(n) = x(n/L_i)$, $n = 0, \pm L_i, \pm 2L_i$ (Σημείωση : το μέγεθος L_i δεν έχει σχέση με το μήκος L της κρουστικής απόκρισης του καναλιού). Το ιδεατό φίλτρο που πραγματοποιεί την παρεμβολή είναι το $h_i(n) = \mathbf{sin}(\pi n/L_i)/(\pi n/L_i)$ και η $\{x_i(n)\}$ προκύπτει από την γραμμική συνέλιξη [2] :

$$x_i(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \frac{\mathbf{sin}\left[\pi(n-kL_i)/L_i\right]}{\pi(n-kL_i)/L_i} \tag{4.28}$$

Σημειώνεται ότι η ακολουθία που εισέρχεται στο φίλτρο αλλά και το ίδιο το φίλτρο θεωρούνται στην ανάλυση ως απείρων σημείων. Η συχνοτική απόκριση $H_i\left(e^{j\omega}\right)$ ενός τέτοιου φίλτρου φαίνεται στο σχήμα 4-7.



Σχήμα 4-7 Συχνοτική απόκριση του φίλτρου ιδεατής παρεμβολής

Στην συγκεκριμένη περίπτωση η αρχική ακολουθία είναι η $\left\{\hat{H}_{LS,p}(k)\right\} = \left\{\hat{H}_{LS}(k_{p_1}), \ldots, \hat{H}_{LS}(k_{p_{N_p}})\right\}$ που αποτελείται από τις LS εκτιμήσεις του καναλιού στις πιλοτικές συχνότητες k_{p_i}, χωρίς ενδιάμεσα μηδενικά σημεία, και η οποία έχει περίοδο δειγματοληψίας $N_f \Delta f$. Επομένως σε αντιστοιχία με την (4.28) η ζητούμενη ακολουθία με περίοδο δειγματοληψίας Δf θα δίνεται από την σχέση

$$H_i(k) = \sum_{r=0}^{N_p-1} \hat{H}_{LS,p}(r) \frac{\mathbf{sin}\left[\pi\left(r-kN_f\right)/N_f\right]}{\pi\left(r-kN_f\right)/N_f} \tag{4.29}$$

όπου η άθροιση δεν γίνεται σε άπειρους όρους επειδή η $\left\{\hat{H}_{LS,p}(k)\right\}$ είναι πεπερασμένη σε N_p σημεία οπότε και το μήκος του φίλτρου περιορίζεται και αυτό σε N_p σημεία.

Η ακρίβεια της εκτίμησης ενός τέτοιου φίλτρου γενικά δεν θα είναι ικανοποιητική εφόσον το εύρος ζώνης του στο πεδίο του χρόνο όπως φαίνεται από το σχήμα 4-7 επιτρέπει την διέλευση ανεπιθύμητου θορύβου στις "συχνότητες" μεγαλύτερες από $2\pi - \pi/N_f$. Επιπλέον η υλοποίηση του φίλτρου με πεπερασμένο αριθμό σημείων προκαλεί παραμόρφωση της ιδεατής συχνοτικής απόκρισης του σχήματος 4-7.

4.4 Φίλτρα Wiener (MMSE εκτίμηση)

Από την ανάλυση της εκτίμησης καναλιού μέσω IDFT-DFT φίλτρου προέκυψε ότι η ακρίβεια της εκτίμησης εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την γνώση του μήκους L της διακριτής FIR κρουστικής απόκρισης. Η γνώση του L επιτρέπει την εκτίμηση με μέσο τετραγωνικό σφάλμα που δίνεται από την (4.27), ανεξάρτητα από τον θόρυβο του συστήματος και την κατανομή της ισχύος στα σημεία της κρουστικής. Εάν ο δέκτης έχει πληροφορία για αυτά τα μεγέθη – τον θόρυβο και την κατανομή της ισχύος του καναλιού – η εκτίμηση μπορεί να βελτιωθεί.

Στην θεωρία φίλτρων υπάρχει μία κατηγορία βέλτιστων γραμμικών φίλτρων που ονομάζονται Wiener φίλτρα. Τα φίλτρα αυτά είναι βέλτιστα με κριτήριο ότι η έξοδος τους έχει το ελάχιστο δυνατό μέσο τετραγωνικό σφάλμα [5]. Για να επιτευχθεί αυτό χρειάζεται να είναι γνωστές ορισμένες στατιστικές παράμετροι της ακολουθίας εισόδου, που είναι η αυτοσυσχέτισή της ίδιας της ακολουθίας αλλά και του θορύβου που είναι ενσωματωμένος στα δείγματά της. Η ανάγκη γνώσης αυτών των μεγεθών προκύπτει από τον περιορισμό που επιβάλλεται στην έξοδο του φίλτρου σε σχέση με το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Προφανώς και τα Wiener φίλτρα πρέπει να ικανοποιούν τις βασικές παραμέτρους ενός απλού φίλτρου όπως είναι το κατάλληλο εύρος ζώνης. Στην συνέχεια θα υπολογιστούν αναλυτικά τα σημεία ενός Wiener φίλτρου μέσω του οποίου θα προκύψει η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης από τα δειγματοληπτημένα σημεία της.

Θα θεωρηθεί ότι η εκτίμηση σε κάθε υπο-φέρουσα k γίνεται με βάση το σύνολο αρχικών LS εκτιμήσεων όλων των πιλοτικών συχνοτήτων του OFDM συμβόλου, οι οποίες περιγράφονται από το $N_p \times 1$ διάνυσμα $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} = \left[\hat{H}_{LS}(k_{p_1}), \hat{H}_{LS}(k_{p_2}), \ldots, \hat{H}_{LS}(k_{p_{N_p}})\right]^T$. Επομένως η εκτίμηση θα δίνεται από την σχέση :

$$\hat{H}_{MMSE}(k) = \mathbf{a}_k^T \hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \tag{4.30}$$

όπου $\hat{H}_{MMSE}(k)$ είναι η εκτίμηση ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE) στην υπο-φέρουσα k και $\mathbf{a}_k = [a_k(0), a_k(1), \ldots, a_k(N_p - 1)]^T$ το $N_p \times 1$ διάνυσμα με τα σημεία του φίλτρου. Ο δείκτης k υποδηλώνει ότι για κάθε σημείο k η εκτίμηση γίνεται με ξεχωριστό φίλτρο. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης για οποιεσδήποτε τιμές των σημείων του φίλτρου θα ισούται με

$$\begin{aligned}E\left\{\left|e(k)\right|^2\right\} &= E\left\{\left|H(k)-\hat{H}_{MMSE}(k)\right|^2\right\}\\ &= E\left\{\left|H(k)-\mathbf{a}_k^T\,\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\right|^2\right\} = E\left\{\left(H(k)-\mathbf{a}_k^T\,\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\right)\left(H(k)-\mathbf{a}_k^T\,\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\right)^H\right\}\\ &= E\left\{\left|H(k)\right|^2\right\} - E\left\{H(k)\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}^H\right\}\left(\mathbf{a}_k^T\right)^H - \mathbf{a}_k^T\,E\left\{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\,H^*(k)\right\} + \mathbf{a}_k^T\,E\left\{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\,\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}^H\right\}\left(\mathbf{a}_k^T\right)^H\end{aligned} \tag{4.31}$$

Η απαίτηση το $\mathbf{a}_k$ να είναι τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σημαίνει ότι θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}_k^T}\left[E\left\{\left|e(k)\right|^2\right\}\right]=0\\ &\Rightarrow \mathbf{a}_k^T = E\left\{H(k)\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}^H\right\}\cdot\left[E\left\{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\,\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}^H\right\}\right]^{-1}\\ &\Rightarrow \mathbf{a}_k^T = \mathbf{R}_{H(k)\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}\,\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}^{-1}\end{aligned} \tag{4.32}$$

όπου $\mathbf{R_{XY}} = E\left\{\mathbf{XY}^H\right\}$ ο πίνακας ετεροσυσχέτισης των πινάκων/διανυσμάτων $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ [3].

Η (4.32) δίνει τα σημεία του Wiener φίλτρου μέσω του οποίου γίνεται η MMSE εκτίμηση του καναλιού στην συχνότητα k. Η σχέση αυτή επιβεβαιώνει αυτό που αναφέρθηκε παραπάνω, ότι τα φίλτρα αυτής της κατηγορίας απαιτούν την γνώση στατιστικής πληροφορίας που είναι οι πίνακες ετεροσυσχέτισης των $H(k)-\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$ και $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}-\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$. Για ευκολία θα θεωρηθεί η περίπτωση όπου $N_p = N$ δηλαδή έχει γίνει LS εκτίμηση σε όλες τις συχνότητες, οπότε $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} = \hat{\mathbf{H}}_{LS} = \left[\hat{H}_{LS}(0),\hat{H}_{LS}(1),\ldots,\hat{H}_{LS}(N-1)\right]^T$. Σε αυτή την περίπτωση η χρήση του φίλτρου μειώνει την επίδραση του θορύβου (smoothing) [3], [14].

Ο πρώτος πίνακας αυτοσυσχέτισης υπολογίζεται αναλυτικά ως εξής :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{H(k)\hat{\mathbf{H}}_{LS}} &= E\left\{H(k)\cdot\hat{\mathbf{H}}_{LS}^H\right\} = E\left\{H(k)\cdot\left[\hat{H}_{LS}^*(0),\hat{H}_{LS}^*(1),\ldots,\hat{H}_{LS}^*(N-1)\right]\right\}\\ &=\left[E\left\{H(k)\hat{H}_{LS}^*(0)\right\},E\left\{H(k)\hat{H}_{LS}^*(0)\right\},\ldots,E\left\{H(k)\hat{H}_{LS}^*(0)\right\}\right]\end{aligned} \tag{4.33}$$

Είναι :

$$\begin{aligned}E\left\{H(k_1)\hat{H}_{LS}^*(k_2)\right\} &= E\left\{H(k_1)\cdot\left[H^*(k_2)+W^*(k_2)/X^*(k_2)\right]\right\}\\ &= E\left\{H(k_1)H^*(k_2)\right\}+\left(1/X^*(k_2)\right)\cdot E\left\{H(k_1)W^*(k_2)\right\}\\ &= E\left\{H(k_1)H^*(k_2)\right\}\end{aligned} \tag{4.34}$$

εφόσον $E\left\{H(k_1)W^*(k_2)\right\}=0,\ \forall k_1,k_2$. Επομένως η (4.34) γίνεται :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{H(k)\hat{\mathbf{H}}_{LS}} &= \left[E\left\{H(k)H^*(0)\right\},E\left\{H(k)H^*(1)\right\},\ldots,E\left\{H(k)H^*(N-1)\right\}\right] = E\left\{H(k)\mathbf{H}^H\right\}\\ &= \mathbf{R}_{H(k)\mathbf{H}}\end{aligned} \tag{4.35}$$

Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης του $\hat{\mathbf{H}}_{LS}$ ισούται με :

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}} = E\left\{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}^{H}\right\} = E\left\{\begin{bmatrix}\hat{H}_{LS}(0)\\ \vdots \\ \hat{H}_{LS}(N-1)\end{bmatrix}\cdot\left[\hat{H}_{LS}^{*}(0),\ldots,\hat{H}_{LS}^{*}(N-1)\right]\right\}$$
$$\Rightarrow \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}} = \begin{bmatrix} r_{LS}(0) & r_{LS}(-1) & \cdots & r_{LS}(-N+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{LS}(N-1) & r_{LS}(N-2) & \cdots & r_{LS}(0)\end{bmatrix} \tag{4.36}$$

όπου

$$\begin{aligned} r_{LS}(k_1-k_2) &= E\left\{\hat{H}_{LS}(k_1)\hat{H}_{LS}^{*}(k_2)\right\} = E\left\{\left[H(k_1)+W(k_1)/X(k_1)\right]\left[H^{*}(k_2)+W^{*}(k_2)/X^{*}(k_2)\right]\right\} \\ &= E\left\{H(k_1)H^{*}(k_2)\right\} + E\left\{W(k_1)W^{*}(k_2)\right\}/X(k_1)X^{*}(k_2) \\ &= E\left\{H(k_1)H^{*}(k_2)\right\} + (1/SNR)\delta(k_1-k_2). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Τελικά προκύπτει

$$\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}} = \mathbf{R}_{\mathbf{HH}} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I} \tag{4.38}$$

όπου $\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Από τις (4.32), (4.35), (4.38) τελικά προκύπτει ότι :

$$\mathbf{a}_k^T = \mathbf{R}_{H(k)\mathbf{H}}\cdot\left(\mathbf{R}_{\mathbf{HH}} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1} \tag{4.39}$$

και η τελική εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης είναι από τις (4.30), (4.39) ίση με :

$$\hat{H}_{MMSE}(k) = \mathbf{R}_{H(k)\mathbf{H}}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{HH}} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{LS} \tag{4.40}$$

όπου $\hat{H}_{MMSE}(k)$ η τελική εκτίμηση με το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Με συμβολισμό πινάκων η MMSE εκτίμηση για όλες τις συχνότητες, $\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \left[\hat{H}_{MMSE}(0),\ldots,\hat{H}_{MMSE}(N-1)\right]^T$ δίνεται για την γενική περίπτωση $N_p \le N$ πιλοτικών συχνοτήτων από την σχέση

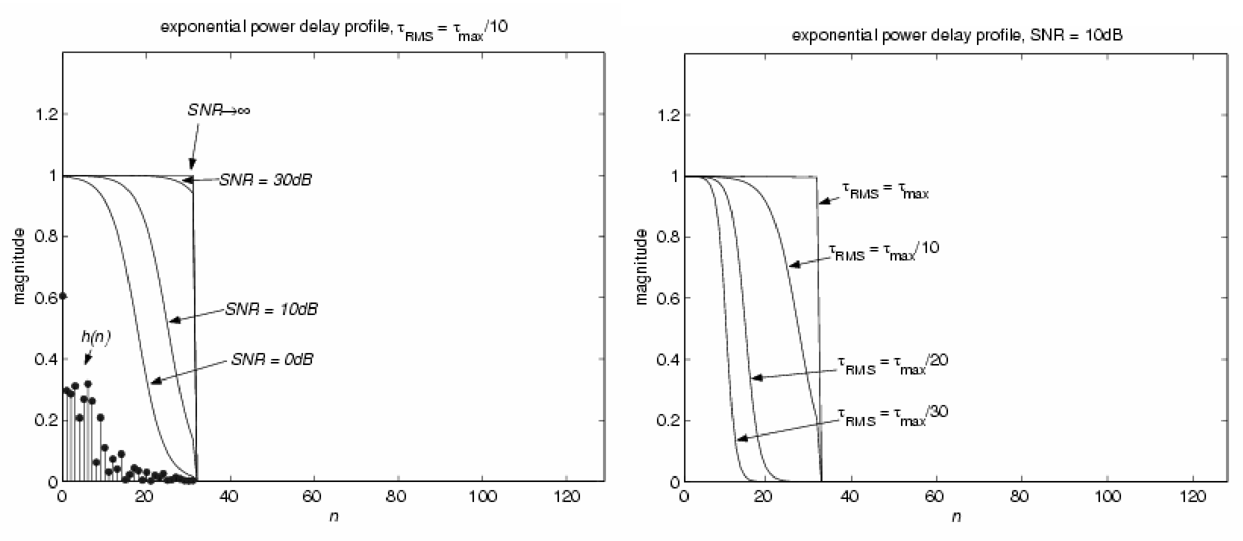
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{R}_{\mathbf{HH}_p}\mathbf{R}^{-1}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \\ &= \underbrace{\mathbf{R}_{\mathbf{HH}_p}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{H}_p\mathbf{H}_p} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}}_{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ μπορεί να προκύψει και ως ο πίνακας για τον οποίο ελαχιστοποιείται η ποσότητα $(1/N)E\left\{\left\|\mathbf{H}-\mathbf{A}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\right\|^2\right\}$. Εφόσον είναι διαστάσεων $N\times N_p$, το φίλτρο έχει πολυπλοκότητα N_p πολλαπλασιασμούς ανά εκτίμηση.

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης προκύπτει ίσο με

$$
\begin{aligned}
MSE_{MMSE} &= \frac{1}{N} trace\left\{ E\left\{ \left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_{MMSE}\right)\left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_{MMSE}\right)^{H} \right\}\right\} = \ldots \\
&= \frac{1}{N} trace\left\{ \mathbf{R}_{\mathbf{HH}} - \mathbf{R}_{\mathbf{HH_p}} \left(\mathbf{R}_{\mathbf{H}_p\mathbf{H}_p} + \left(1/SNR\right)\mathbf{I}_{N_p} \right)^{-1} \mathbf{R}^{H}_{\mathbf{HH}_p} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Από την (4.42) φαίνεται ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της MMSE εκτίμησης εξαρτάται από την ισχύ του θορύβου του συστήματος αλλά και από την στατιστική του καναλιού. Εφόσον το φίλτρο έχει προσαρμοστεί στην στατιστική του καναλιού και του θορύβου αναμένεται να δώσει καλύτερη εκτίμηση σε σχέση με το απλό IDFT-DFT φίλτρο. Στο σχήμα 4-8-1 φαίνεται η απόκριση του Wiener φίλτρου της σχέσης (4.39) στο πεδίο του χρόνου το οποίο έχει προσαρμοστεί σε κανάλι με εκθετικά μειωμένη κατανομή ισχύος στα σημεία της κρουστικής του απόκρισης $\{h(n)\}$ (σχέση (2.15)), για διάφορες τιμές του SNR, ενώ στο 4-8-2 φαίνεται η προσαρμογή του φίλτρου για SNR = 10dB σε διάφορες τιμές της σταθεράς τ_{RMS} που χαρακτηρίζει την κατανομή ισχύος της $\{h(n)\}$. Όσο μικρότερη είναι η σταθερά τ_{RMS} τόσο μικρότερη είναι και η μη αμελητέα διάρκεια της κρουστικής απόκρισης, που σημαίνει ομαλότερη συχνοτική απόκριση. Είναι εμφανής η προσαρμογή του φίλτρου στην στατιστική καναλιού και θορύβου με χαρακτηριστικό ότι για μεγάλη ισχύ θορύβου το φίλτρο αποκόπτει πληροφορία του καναλιού προκειμένου να μειώσει ακόμα περισσότερο την ισχύ του θορύβου.



1 **2**

Σχήμα 4-8 1. Προσαρμογή του Wiener φίλτρου στην ισχύ του θορύβου,
2. Προσαρμογή του Wiener φίλτρου στην κατανομή ισχύος της κροσυτικής.

4.4.1 Προσαρμογή του Wiener φίλτρου σε στατιστική διαφορετική από την πραγματική

Στην πράξη, η στατιστική του καναλιού και του θορύβου δεν είναι γνωστή οπότε και η εκτίμηση δεν έχει την ακρίβεια της (4.42) εφόσον υποχρεωτικά η μη ακριβής γνώση της στατιστικής οδηγεί σε απόκλιση (mismatch) από την ιδανική περίπτωση της απόλυτης προσαρμογής του φίλτρου στις συνθήκες λειτουργίας του συστήματος, με πιθανή την περίπτωση προσαρμογής σε στατιστική εντελώς διαφορετική από την πραγματική που θα οδηγήσει σε μεγάλο σφάλμα εκτίμησης. Επιπλέον, η εφαρμογή διαδικασίας υπολογισμού της στατιστικής με σκοπό την προσαρμογή του φίλτρου σε αυτήν επιβαρύνει υπολογιστικά το δέκτη κάνοντας έτσι επιθυμητή την προσαρμογή του Wiener φίλτρου σε στατιστική που να επιτρέπει την σωστή λειτουργία σε όλες τις περιπτώσεις, με κόστος την μείωση της απόδοσης σε σχέση με την ιδεατή περίπτωση της απόλυτης προσαρμογής του φίλτρου στις πραγματικές συνθήκες.

Όπως και στην περίπτωση του IDFT-DFT φίλτρου μπορεί να θεωρηθεί ότι η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης ισούται με την διάρκεια του κυκλικού προθέματος. Αν και στην περίπτωση που η διάρκεια του καναλιού είναι μικρότερη, το φίλτρο επιτρέπει την διέλευση σε μεγαλύτερο μέρος του θορύβου οπότε υπάρχει μείωση της απόδοσης, το φίλτρο δεν θα χάσει ποτέ πληροφορία του καναλιού που θα οδηγούσε σε μεγάλο σφάλμα.

Το επόμενο θέμα είναι η αυτοσυσχέτιση του καναλιού στην οποία θα προσαρμοστεί το φίλτρο. Από το σχήμα 4-8-2 φαίνεται ότι η προσαρμογή του φίλτρου σε ηπιότερο κανάλι από το πραγματικό θα προκαλέσει σφάλμα εφόσον αποκόπτει πληροφορία από τα τελευταία σημεία της κρουστικής απόκρισης τα οποία πιθανόν να μην είναι αμελητέα. Επομένως η καταλληλότερη επιλογή είναι η προσαρμογή του φίλτρου στο χειρότερο δυνατό κανάλι που πρόκειται να αντιμετωπίσει το σύστημα που στην γενικότερη περίπτωση αντιστοιχεί κρουστικής απόκρισης με ομοιόμορφη κατανομή ισχύος [17]. Αντίστοιχα για το SNR στο οποίο θα προσαρμοστεί το φίλτρο, από το σχήμα 4-8-1 φαίνεται ότι η επιλογή μεγάλου SNR είναι η καταλληλότερη.

Προφανώς η απόδοση του Wiener φίλτρου θα είναι χειρότερη από την απόδοση ενός προσαρμοσμένου στις πραγματικές συνθήκες φίλτρου, άρα το μέσο τετραγωνικό σφάλμα θα είναι μεγαλύτερο από αυτό της σχέσης (4.42). Εφόσον όμως το χειρότερο δυνατό κανάλι που πρόκειται να αντιμετωπίσει το σύστημα δεν έχει ομοιόμορφη κατανομή ισχύος στα σημεία της $h(n)$ και το μέγιστο SNR λειτουργίας του συστήματος δεν είναι τέτοιο ώστε το φίλτρο να είναι “τετραγωνισμένο” στο πεδίο του χρόνου, η εκτίμηση θα είναι καλύτερη από αυτή του IDFT-DFT φίλτρου. Αν κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει, τότε τα δύο φίλτρα έχουν την ίδια απόδοση.

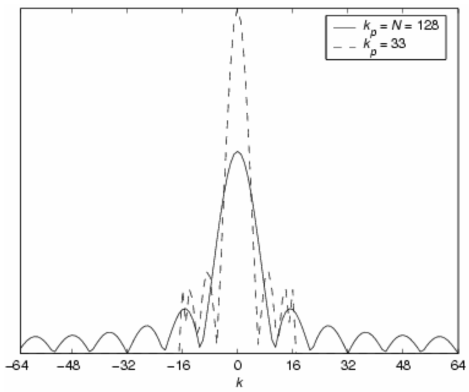
4.5 Μείωση της πολυπλοκότητας του Wiener φίλτρου

4.5.1 Φίλτρο χαμηλής τάξης

Το Wiener φίλτρο εκτός της καλύτερης απόδοσης σε σχέση με το IDFT-DFT φίλτρο, έχει το πλεονέκτημα της εφαρμογής του σε απλοποιημένη μορφή, ώστε η υπολογιστική πολυπλοκότητα της εκτίμησης να μειωθεί. Εάν το σύστημα έχει N_p πιλοτικές συχνότητες, η πολυπλοκότητα της εκτίμησης σύμφωνα με την ανάλυση της (4.39) είναι N_p μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί ανά εκτίμηση. Το φίλτρο δηλαδή εκμεταλλεύεται όλες τις πιλοτικές συχνότητες και χρησιμοποιώντας την αυτοσυσχέτιση του καναλιού δίνει την τελική εκτίμηση.

Η μείωση της πολυπλοκότητας μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας για την εκτίμηση σε κάποια συχνότητα, την πληροφορία των πλησιέστερων σε αυτή $K_p < N_p$ πιλοτικών συχνοτήτων. Επειδή η συσχέτιση συχνοτήτων που απέχουν αρκετά μεταξύ τους είναι μικρή, η αγνόησή τους έχει μικρή επίδραση στην ακρίβεια της εκτίμησης, με κέρδος την ελάττωση της πολυπλοκότητας σε K_p πολλαπλασιασμούς ανά εκτίμηση. Ο αριθμός K_p εξαρτάται από την μορφή της συχνοτικής απόκρισης του καναλιού. Ένα κανάλι που έχει έντονα μεταβαλλόμενη συχνοτική απόκριση (frequency selective channel) έχει και μικρό συνεχές εύρος ζώνης, επομένως οι συχνότητες που έχουν μεγάλη συσχέτιση μεταξύ τους είναι σχετικά λίγες άρα μικρός αριθμός K_p είναι επαρκής. Αντίθετα ένα κανάλι με ομαλή συχνοτική απόκριση και μεγάλο συνεχές εύρος ζώνης απαιτεί μεγαλύτερο K_p προκειμένου το φίλτρο να εκμεταλλευτεί την γνώση της αυτοσυσχέτισης του καναλιού [23].

Τα σημεία του φίλτρου τάξεως $K_p - 1$ για την εκτίμηση σε μία υπο-φέρουσα k υπολογίζονται με αντίστοιχο τρόπο με την περίπτωση του φίλτρου τάξεως $N_p - 1$. Στο σχήμα 4-9 φαίνεται η μεταβολή των σημείων του φίλτρου ανάλογα με τον αριθμό K_p για την περίπτωση όπου έχει γίνει αρχική LS εκτίμηση σε όλες τις συχνότητες ($N_p = N$). Στην ακραία περίπτωση όπου $K_p = 1$ η εκτίμηση είναι ίδια με την LS εκτίμηση.



Σχήμα 4-9 Προσαρμογή των σημείων του Wiener φίλτρου για την εκτίμηση στη κεντρική συχνότητα (k = 64), ανάλογα με τον αριθμό των K_p LS εκτιμήσεων που χρησιμοποιούνται

4.5.2 Εφαρμογή SVD

Η σχέση (4.41) που δίνει την εκτίμηση με χρήση Wiener φίλτρου, επειδή είναι σε μορφή πινάκων μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας την θεωρία γραμμικής άλγεβρας. Για λόγους ευκολίας στην μαθηματική ανάλυση θα θεωρηθεί η περίπτωση όπου όλες οι συχνότητες είναι πιλοτικές ($N_p = N$). Τότε η (4.41) γίνεται

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \underbrace{\mathbf{R_{HH}}\left(\mathbf{R_{HH}} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}}_{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{H}}_{LS} \tag{4.43}$$

Το ζητούμενο είναι η απλοποίηση του πίνακα $\mathbf{A}$ έτσι ώστε η εκτίμηση σε κάθε συχνότητα να έχει πολυπλοκότητα μικρότερη από N πολλαπλασιασμούς κάνοντας χρήση των αρχικών LS εκτιμήσεων σε όλες τις συχνότητες. Η απλοποίηση θα προέλθει από τον μετασχηματισμό του πίνακα αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης

$$\mathbf{R_{HH}} = E\left\{\mathbf{HH}^H\right\} = \begin{bmatrix} r_H(0) & r_H(-1) & r_H(-2) & \cdots & r_H(-N+1) \\ r_H(1) & r_H(0) & r_H(-1) & \cdots & r_H(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_H(N-1) & r_H(N-2) & r_H(N-3) & \cdots & r_H(0) \end{bmatrix} \tag{4.44}$$

όπου $r_H(k)$ είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης. Για την περίπτωση FIR κρουστικής απόκρισης με κατανομή ισχύος που μειώνεται εκθετικά, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δίνεται από την (2.33). Από την (2.33) φαίνεται ότι $r_H(-k) = r_H^*(k)$. Η ιδιότητα αυτή ισχύει για την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης οποιασδήποτε στοχαστικής διαδικασίας στατικής με την ευρεία έννοια [5]. Με βάση την παρατήρηση αυτή ο πίνακας $\mathbf{R_{HH}}$ γράφεται :

$$\mathbf{R_{HH}} = \begin{bmatrix} r_H(0) & r_H(-1) & r_H(-2) & \cdots & r_H(-N+1) \\ r_H^*(-1) & r_H(0) & r_H(1) & \cdots & r_H(-N+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_H^*(-N+1) & r_H^*(-N+2) & r_H^*(-N+3) & \cdots & r_H(0) \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

Από την (4.45) προκύπτει ότι $\mathbf{R_{HH}} = \mathbf{R_{HH}}^H$, δηλαδή ο πίνακας αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης είναι ερμιτιανός. Από την θεωρία γραμμικής άλγεβρας ο πίνακας $\mathbf{R_{HH}}$ μπορεί να αναλυθεί ως [4] :

$$\mathbf{R_{HH}} = \mathbf{U\Lambda U}^{\mathrm{H}} \tag{4.46}$$

όπου $\mathbf{U}$ είναι ο μοναδιαίος $N \times N$ πίνακας με στήλες τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}_i$ του πίνακα $\mathbf{R_{HH}}$ και $\Lambda = D([\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N])$ ο $N \times N$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές λ_i. Επειδή ο $\mathbf{R_{HH}}$ είναι ερμιτιανός, οι ιδιοτιμές του θα είναι πραγματικές και μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός [4]. Επιπλέον είναι διατεταγμένες στην διαγώνιο του $\mathbf{\Lambda}$ σε φθίνουσα σειρά, δηλαδή $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N \geq 0$. Επομένως η (4.43) γίνεται

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \mathbf{R}_{\mathbf{HH}}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{HH}} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{H}\left(\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{H} + \frac{1}{SNR}\mathbf{U}\mathbf{U}^{H}\right)^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{LS}$$
$$\Rightarrow \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{H}\left[\mathbf{U}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)\mathbf{U}^{H}\right]^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{H}\left(\mathbf{U}^{H}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{U}^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{LS} \quad (4.47)$$
$$\Rightarrow \hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \underbrace{\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\left(\boldsymbol{\Lambda} + \frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}}_{\Delta}\mathbf{U}^{H}\hat{\mathbf{H}}_{LS}$$

όπου έγινε χρήση της σχέσης $\mathbf{U}^{H} = \mathbf{U}^{-1}$. Ο πίνακας $\boldsymbol{\Delta}$ είναι ένας $N \times N$ διαγώνιος πίνακας ο οποίος αναλυτικά γράφεται

$$\Delta = D\left(\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 1/SNR}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1/SNR}, \ldots, \frac{\lambda_N}{\lambda_N + 1/SNR}\right]\right) \quad (4.48)$$

Η απλοποίηση που μπορεί να γίνει είναι να θεωρηθούν οι τελευταίες $N - r$ ιδιοτιμές ως αμελητέες και ίσες με μηδέν. Επομένως ο πίνακας $\boldsymbol{\Delta}$ μετατρέπεται στον

$$\Delta \to \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_r & \mathbf{0}_{r\times(N-r)} \\ \mathbf{0}_{(N-r)\times r} & \mathbf{0}_{(N-r)\times(N-r)} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

όπου ο πίνακας $\boldsymbol{\Delta}_r$ υποδηλώνει τον διαγώνιο $r \times r$ πίνακα με στοιχεία τα r πρώτα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $\boldsymbol{\Delta}$ της (4.48). Μία ικανοποιητική προσέγγιση του r είναι η $r \approx (1/T_s)\cdot(LT_s) = L$, όπου ο πρώτος παράγοντας του γινομένου είναι το δίπλευρο εύρος ζώνης της συχνοτικής απόκρισης και ο δεύτερος η διάρκεια της κρουστικής απόκρισης [17]. Με αντικατάσταση του πίνακα $\boldsymbol{\Delta}$ της (4.49) στην (4.47), μπορεί να δειχθεί ότι η τελική εκτίμηση δίνεται από την σχέση

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \left(\sum_{k=1}^{r}\delta_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^{H}\right)\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \sum_{k=1}^{r}\mathbf{q}_k \left\langle \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{H}}_{LS}\right\rangle \quad (4.50)$$

όπου δ_k είναι το k διαγώνιο στοιχείο του Δ_r, $\mathbf{u}_k$ η k στήλη του $\mathbf{U}$, $\mathbf{q}_k = \delta_k \mathbf{u}_k$ είναι ένα προϋπολογισμένο N×1 διάνυσμα και $\left\langle \mathbf{u}_k, \hat{\mathbf{H}}_{LS}\right\rangle = \mathbf{u}_k^{H}\hat{\mathbf{H}}_{LS}$ το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{u}_k$ και $\hat{\mathbf{H}}_{LS}$ που χρειάζεται N πολλαπλασιασμούς. Επομένως για κάθε k στοιχείο του παραπάνω αθροίσματος χρειάζονται $2N$ πολλαπλασιασμοί, άρα το άθροισμα r τέτοιων στοιχείων απαιτεί $2rN$ πολλαπλασιασμούς. Ισοδύναμα για κάθε εκτίμηση ξεχωριστά, χρειάζονται $2r$ πολλαπλασιασμοί, αριθμός μικρότερος από τους N που χρειάζεται η υλοποίηση του Wiener φίλτρου σύμφωνα με την (4.43) .

Εφόσον οι ιδιοτιμές λ_i είναι γενικά διάφορες του μηδενός αναμένεται μείωση της ακρίβειας της εκτίμησης η οποία εξαρτάται από τον αριθμό των ιδιοτιμών που θα θεωρηθούν αμελητέες, εφόσον η αγνόησή τους σημαίνει απώλεια της πληροφορίας που περιέχουν αυτές. Στην ιδεατή περίπτωση όπου η αυτοσυσχέτιση του καναλιού και το SNR είναι γνωστά, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης με την παραπάνω προσέγγιση μπορεί να δειχθεί ότι ισούται με [17] :

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r}\left[\lambda_i\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_i+1/SNR}\right)^2+\frac{1}{SNR}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+1/SNR}\right)^2\right]+\frac{1}{N}\sum_{i=r+1}^{N}\lambda_i \qquad (4.51)$$

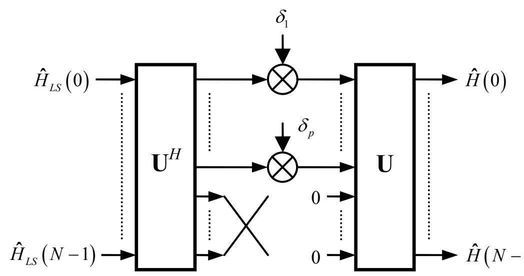
Από την (4.51) φαίνεται ότι η ελάχιστη τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος προκύπτει για $SNR \to \infty$ και ισούται με τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους. Δηλαδή ισχύει για όλες τις περιπτώσεις

$$MSE \geq \frac{1}{N}\sum_{i=r+1}^{N}\lambda_i \qquad (4.52)$$

Είναι εμφανές ότι εάν $r = N$ το μέσο τετραγωνικό σφάλμα δεν έχει κάτω όριο. Εάν όμως το r είναι αρκετά μεγάλο ώστε οι ιδιοτιμές λ_i, $i > r$, να είναι πολύ μικρές, η μείωση της απόδοσης είναι αμελητέα. Εφόσον δεν είναι γνωστή ακριβώς η στατιστική του καναλιού (mismatch) θα υπάρχει επιπρόσθετο σφάλμα λόγω αυτής της απόκλισης.

Σημείωση : Η (4.51) δίνει σε κλειστή μορφή το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης ενός Wiener φίλτρου για την περίπτωση όπου όλες οι συχνότητες είναι πιλοτικές, εάν τεθεί $r = N$. Προκύπτει ότι ισούται με $MSE_{MMSE} = (1/N)\sum_{i=0}^{N-1} 1/(SNR + (1/\lambda_i))$ που αποτελεί την κλειστή μορφή της (4.42), για την περίπτωση όπου $N_p = N$.

Μαθηματικά, η εκτίμηση της (4.47) μπορεί να θεωρηθεί σαν η προβολή των αρχικών LS εκτιμήσεων σε ένα διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων (βάση), μέσω του μετασχηματισμού $\mathbf{U}^H$. Σε αυτή τη βάση το μετασχηματισμένο διάνυσμα των LS εκτιμήσεων αποτελείται από μεταβλητές ασυσχέτιστες μεταξύ τους και έχει πρακτική διάσταση $r < N$, επομένως η διαδικασία της εκτίμησης εκεί έχει μικρότερη πολυπλοκότητα. Στην συνέχεια το αποτέλεσμα επαναφέρεται στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων μέσω του μετασχηματισμού $\mathbf{U}$. Η εκτίμηση με αυτή την διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 4-10.



Σχήμα 4-10 Μπλοκ διάγραμμα της εκτίμησης με χρήση SVD (σχέσεις (4.47)-(4.49))

Η παραπάνω ανάλυση έγινε όπως αναφέρθηκε για την περίπτωση όπου όλες οι συχνότητες είναι πιλοτικές, και για οποιαδήποτε μορφή καναλιού, είτε αυτό είναι FIR ή όχι, αρκεί να υπάρχει η γνώση της αυτοσυσχέτισής της συχνοτικής του απόκρισης. Στην περίπτωση όπου η κρουστική του καναλιού περιγράφεται από ένα FIR φίλτρο μήκους L σημείων ασυσχέτιστων μεταξύ τους (2.10), η παραπάνω διαδικασία μπορεί να υλοποιηθεί μέσω του διακριτού μετασχηματισμού Fourier όπως αποδεικνύεται στην συνέχεια.

Εφόσον έχει θεωρηθεί ασυσχέτιστη διασπορά, ο πίνακας αυτοσυσχέτισης της κρουστικής απόκρισης $\{h(n)\}$ που περιγράφεται από το $N \times 1$ διάνυσμα $\mathbf{h} = [h(0), h(1), \ldots, h(L-1), 0, \ldots, 0]^T$, είναι της μορφής

$$\mathbf{R_{hh}} = E\{\mathbf{hh}^H\} = D\left(\left[\sigma_0^2, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_{L-1}^2, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-L\ \varphi o \rho \varepsilon \varsigma}\right]\right), \tag{4.53}$$

όπου σ_n^2 η ισχύς του n σημείου της κρουστικής. Η συχνοτική απόκριση είναι ο DFT N-σημείων του **h**, $\mathbf{H} = \sqrt{N}\,\mathbf{F}\mathbf{h}$. Ο πίνακας $\mathbf{F}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας του διακριτού μετασχηματισμού Fourier :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j2\pi 2/N} & \cdots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j2\pi(N-1)2/N} & \cdots & e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

και για τον οποίον ισχύει $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H$. Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier εκφράζεται από τον πίνακα $\left(1/\sqrt{N}\right)\mathbf{F}^{-1} = \left(1/\sqrt{N}\right)\mathbf{F}^H$. Έχοντας ορίσει το πίνακα του μετασχηματισμού Fourier ο πίνακας αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης ισούται με

$$\begin{aligned} \mathbf{R_{HH}} &= E\left\{\mathbf{HH}^H\right\} = E\left\{\sqrt{N}\,\mathbf{Fhh}^H \sqrt{N}\,\mathbf{F}^{-1}\right\} = \sqrt{N}\,\mathbf{F}\,E\left\{\mathbf{hh}^H\right\}\sqrt{N}\,\mathbf{F}^H \\ &= \mathbf{F}\left(N\,\mathbf{R_{hh}}\right)\mathbf{F}^H, \end{aligned} \tag{4.55}$$

Η τελευταία εξίσωση δίνει τον πίνακα αυτοσυσχέτισης ως γινόμενο τριών πινάκων, του μοναδιαίου $\mathbf{F}$, του ερμιτιανού αυτού $\mathbf{F}^H$, και του διαγωνίου πίνακα $N\mathbf{R_{hh}}$. Από τις (4.46) και (4.55) προκύπτει η αντιστοιχία $\mathbf{U} = \mathbf{F}$ και $\mathbf{\Lambda} = N\mathbf{R_{hh}}$. Επομένως η ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{R_{HH}}$ αντιστοιχούν στην ισχύ των σημείων της κρουστικής απόκρισης πολλαπλασιασμένη με τον παράγοντα N , και επιπλέον εφόσον αυτά είναι συνολικά L, οι υπόλοιπες $N-L$ ιδιοτιμές ισούνται με μηδέν. Η προβολή των αρχικών LS εκτιμήσεων στην καινούρια βάση μέσω του $\mathbf{U}^H$ είναι ουσιαστικά ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier αυτών, ο οποίος μεταφέρει τις LS εκτιμήσεις από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου. Εφόσον είναι $r = L$, τα μεγαλύτερα του L δείγματα μηδενίζονται με εφαρμογή της (4.49) ενώ τα σημεία που περιέχουν την κρουστική απόκριση σταθμίζονται με βάση την ισχύ τους και το SNR του συστήματος. Στη συνέχεια ο μετασχηματισμός Fourier επαναφέρει το τελικό αποτέλεσμα στην αρχική βάση, δηλαδή στο πεδίο της συχνότητας. Η χρήση του αλγορίθμου FFT για την υλοποίηση των μετασχηματισμών μειώνει την πολυπλοκότητα της διαδικασίας. Επιπλέον είναι προφανές ότι εάν θεωρηθεί $r > L$ η εκτίμηση έχει περισσότερο θόρυβο ενώ εάν $r < L$ χάνεται πληροφορία του καναλιού και η εκτίμηση είναι εσφαλμένη (εφόσον η ισχύς των τελευταίων σημείων της κρουστικής απόκρισης δεν είναι αμελητέα). Η χρήση του μετασχηματισμού Fourier για την εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης θα αναλυθεί με μεγαλύτερη λεπτομέρεια αργότερα.

Στην περίπτωση όπου οι πιλοτικές συχνότητες είναι $N_p < N$ η MMSE εκτίμηση γίνεται σύμφωνα με την (4.41). Η μείωση της πολυπλοκότητας της εκτίμησης προκύπτει με αντίστοιχο τρόπο με παραπάνω, με την διαφορά ότι ο πίνακας $\mathbf{R}_{\mathbf{HH}_p}$ δεν είναι τετραγωνικός, και δεν μπορεί να αναλυθεί στην μορφή της (4.46). Επομένως χρησιμοποιείται το θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας σύμφωνα με το οποίο ένας $m \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ μπορεί να αναλυθεί στην μορφή [4] :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \mathbf{Z} \mathbf{U}_2^H \tag{4.56}$$

όπου $\mathbf{U}_1$ και $\mathbf{U}_2$ μοναδιαίοι πίνακες διαστάσεων $m \times m$ και $n \times n$ αντίστοιχα, και $\mathbf{Z}$ ο $m \times n$ διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις θετικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Θεωρώντας ότι $\mathbf{R}_{\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}^{-1/2} = \mathbf{U}_1 \mathbf{Z} \mathbf{U}_2^H$, και επιπλέον ότι μόνο τα πρώτα r στοιχεία της διαγωνίου είναι μη αμελητέα, η (4.41) μετατρέπεται στην [17] :

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} &= \mathbf{R}_{\mathbf{H}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}^{-1/2} \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}^{-1/2} \hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \\
&= \mathbf{U}_1 \mathbf{Z} \mathbf{U}_2^H \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}^{-1/2} \hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \\
&= \mathbf{U}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_r & \mathbf{0}_{r\times(N_p-r)} \\ \mathbf{0}_{(N-r)\times r} & \mathbf{0}_{(N-r)\times(N_p-r)} \end{bmatrix} \underbrace{\mathbf{U}_2^H \mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}^{-1/2}}_{\mathbf{U}_2'} \hat{\mathbf{H}}_{LS,p}
\end{aligned} \tag{4.57}$$

και σε αντιστοιχία με την (4.50) η τελική εκτίμηση δίνεται από την σχέση :

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE} = \sum_{k=1}^{r} \left(z_k \, \mathbf{u}_{1,k} \right) \left\langle \mathbf{u}_{2,k}' \, \hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \right\rangle \tag{4.58}$$

η οποία έχει πολυπλοκότητα $r\left(1 + N_p / N\right)$ πολλαπλασιασμούς ανά εκτίμηση.

4.6 Παρεμβολή μέσω IDFT-DFT

Συγκρίσιμη με τις πολυωνυμικές μεθόδους παρεμβολής όσον αφορά την πολυπλοκότητα και την εφαρμογή της σε περιπτώσεις όπου δεν υπάρχει γνώση της στατιστικής καναλιού και θορύβου είναι η παρεμβολή μιας διακριτής ακολουθίας μέσω των μετασχηματισμών IDFT-DFT. Είναι γνωστό ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier N_0-σημείων μιας ακολουθίας $N < N_0$ σημείων δίνει την συχνοτική αναπαράσταση της ακολουθίας με περισσότερα σημεία από αυτά που θα προέκυπταν από έναν DFT N-σημείων [2]. Με βάση αυτή την παρατήρηση, η ακολουθία που προκύπτει από τις αρχικές LS εκτιμήσεις και περιγράφεται από το $N_p \times 1$ διάνυσμα $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} = \left[\hat{H}_{LS}(k_{p_1}), \ldots, \hat{H}_{LS}(k_{p_{N_p}}) \right]^T$, μπορεί να θεωρηθεί ως ο DFT N_p-σημείων της ακολουθίας $\left\{ \hat{h}_{LS,p}(n) \right\} = IDFT\left\{ \hat{H}_{LS,p}(k) \right\}$, $0 \le n \le N_p - 1$. Επεκτείνοντας την ακολουθία $\{\hat{h}_{LS,p}(n)\}$ με μηδενικά ώστε να έχει μήκος N σημείων (zero padding), ο DFT N-σημείων αυτής θα δώσει μία ακολουθία N-σημείων που θα αποτελεί και την εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης.

Αν και σχετικά απλή σε υλοποίηση, η ιδεατή παρεμβολή μέσω DFT έχει ορισμένους περιορισμούς [35] :

- Η δειγματοληψία του συνεχούς σήματος από το οποίο προέκυψε η αρχική διακριτή ακολουθία θα πρέπει να έχει δειγματοληπτηθεί σύμφωνα με τους περιορισμούς του θεωρήματος δειγματοληψίας.
- Επιπλέον, το συνεχές σήμα θα πρέπει να έχει διακριτή φασματική πυκνότητα ισχύος, που στην περίπτωση της συχνοτικής απόκρισης σημαίνει διακριτή κρουστική απόκριση. Επομένως η παρεμβολή μέσω IDFT-DFT δεν μπορεί να εφαρμοστεί για κανάλι της μορφής της (2.5) στο οποίο το μέγεθος τ_l των οδεύσεων παίρνει τιμές στο συνεχές διάστημα $[0,\ \tau_{\mathbf{max}}]$ λόγω φαινομένου διαρροής ενέργειας του DFT όπως αναφέρθηκε παραπάνω.

Θεωρώντας ότι η κρουστική απόκριση περιγράφεται από ένα διακριτό FIR φίλτρο L ασυσχέτιστων σημείων όπως αυτό της (2.10), ο IDFT N_p-σημείων της ακολουθίας $\{\hat{H}_{LS,p}(k)\}$ θα είναι

$$\hat{h}_{LS,p}(n) = h(n) + w_{LS}(n),\ 0 \le n \le N_p - 1 \tag{4.59}$$

Η διαδικασία εξαγωγής της (4.59) είναι ίδια με τις σχέσεις (4.10)-(4.13) στην ανάλυση του IDFT-DFT φίλτρων. Επαναλαμβάνεται ότι η ακολουθία $\{h(n)\}$ είναι η πραγματική κρουστική απόκριση και η $\{w_{LS}(n)\}$ αποτελείται από δείγματα λευκού, κανονικού θορύβου με ισχύ $\sigma^2_{w_{LS}} = 1/(N_p \cdot SNR)$. Επιπλέον η (4.59) ισχύει ακριβώς μόνο στην περίπτωση όπου η απόσταση των πιλοτικών συχνοτήτων είναι $N_f = 1,2,4,8,\ldots$, λόγω φαινομένου διαρροής ενέργειας του DFT για διαφορετικές τιμές του N_f.

Η εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης $\hat{\mathbf{h}}_{LS,p}$ επεκτείνεται με μηδενικά και περιγράφεται από το $N \times 1$ διάνυσμα $\hat{\mathbf{h}}'_{LS} = \left[\hat{\mathbf{h}}_{LS,p}, 0, \ldots, 0\right]^T$. Η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης προκύπτει από τον DFT N-σημείων αυτής της ακολουθίας,

$$\hat{\mathbf{H}}_{DFT} = \sqrt{N}\,\mathbf{F}\,\hat{\mathbf{h}}'_{LS} \tag{4.60}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης υπολογίζεται αναλυτικά ως εξής :

$$\begin{aligned} MSE_{DFT} &= \frac{1}{N} trace\left[E\left\{ \left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_{DFT}\right)\left(\mathbf{H} - \hat{\mathbf{H}}_{DFT}\right)^H \right\} \right] \\ &= (1/N) trace\left[E\left\{ \left(\sqrt{N}\,\mathbf{F}\mathbf{h} - \sqrt{N}\,\mathbf{F}\,\hat{\mathbf{h}}'_{LS}\right)\left(\sqrt{N}\,\mathbf{F}\mathbf{h} - \sqrt{N}\,\mathbf{F}\hat{\mathbf{h}}'_{LS}\right)^H \right\} \right] \\ &= trace\left[E\left\{ \mathbf{w}_{LS}\,\mathbf{w}^H_{LS} \right\} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{N_p} E\left\{ \left| w_{LS}(0) \right|^2 \right\} = N_p \sigma^2_{w_{LS}} = \frac{1}{SNR}, \end{aligned} \tag{4.61}$$

έχοντας κάνοντας χρήση της ιδιότητας των πινάκων που σχετίζονται με μετασχηματισμό ομοιότητας ($\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \Rightarrow trace(\mathbf{B}) = trace(\mathbf{A})$). Προκύπτει ότι η εκτίμηση έχει την ίδια ακρίβεια με την LS εκτίμηση (3.5), με την διαφορά ότι στην τελευταία χρειάζεται όλες οι συχνότητες να είναι πιλοτικές. Σημειώνεται ότι η απόδοση της εκτίμησης είναι ανεξάρτητη του αριθμού των πιλοτικών συχνοτήτων με την προϋπόθεση ότι $N_p \geq L$.

4.6.1 MMSE παρεμβολή μέσω IDFT-DFT

Η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης μέσω IDFT-DFT έχει ακρίβεια που εξαρτάται από την ισχύ του θορύβου του συστήματος, το οποίο οφείλεται στο ότι η παραπάνω ανάλυση για την εξαγωγή της εκτίμησης δεν έλαβε κανένα μέτρο για μείωσή του. Η μείωση του θορύβου μπορεί να γίνει στο πεδίο του χρόνου με βάση το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Όπως έγινε και στην περίπτωση των Wiener φίλτρων για την εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης, στην συγκεκριμένη περίπτωση το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης με το ελάχιστο δυνατό μέσο τετραγωνικό σφάλμα, η οποία θα προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός της αρχικής εκτίμησης $\hat{\mathbf{h}}'_{LS}$, δηλαδή,

$$\hat{\mathbf{h}}_{MMSE} = \mathbf{K}\,\hat{\mathbf{h}}'_{LS} \tag{4.62}$$

όπου $\hat{\mathbf{h}}_{MMSE}$ το $N \times 1$ διάνυσμα με την MMSE εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης και $\mathbf{K}$ ένας $N \times N$ πίνακας. Η απαίτηση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα $E\left\{\left\|\mathbf{h}-\hat{\mathbf{h}}_{MMSE}\right\|^2\right\}$ να είναι ελάχιστο, δίνει ότι ο πίνακας $\mathbf{K}$ ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \mathbf{R}_{\mathbf{h}\hat{\mathbf{h}}'_{LS}} \mathbf{R}^{-1}_{\hat{\mathbf{h}}'_{LS}\hat{\mathbf{h}}'_{LS}} = \mathbf{R}_{\mathbf{hh}}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{hh}} + \mathbf{R}_{\mathbf{w}_{LS}\mathbf{w}_{LS}}\right)^{-1} \\ &= D\left(\left[\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 1/\left(N_p SNR\right)}, \ldots, \frac{\sigma_{L-1}^2}{\sigma_{L-1}^2 + 1/\left(N_p SNR\right)}, 0, \ldots, 0\right]\right)\end{aligned} \tag{4.63}$$

όπου σ_n^2 η ισχύς του n-σημείου της κρουστικής απόκρισης. Εφόσον η στατιστική του καναλιού δεν είναι πλήρως γνωστή μπορεί να θεωρηθεί κανάλι με ομοιόμορφη κατανομή ισχύος και διάρκεια ίση με το κυκλικό πρόθεμα του OFDM συμβόλου. Από την μορφή του πίνακα $\mathbf{K}$ φαίνεται ότι η MMSE εκτίμηση της κρουστικής γίνεται θεωρώντας μόνο τα L πρώτα σημεία της αρχικής εκτίμησης $\hat{\mathbf{h}}'_{LS}$, εφόσον τα υπόλοιπα έχουν μόνο θόρυβο, και με στάθμιση τους σύμφωνα με την κατανομή της ισχύς της κρουστικής (power delay profile) και το SNR του συστήματος.

Το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης στο πεδίο του χρόνου για την περίπτωση όπου είναι γνωστή η στατιστική του καναλιού (οπότε ο πίνακας $\mathbf{K}$ θα δίνεται από την (4.63)) ισούται με

$$MSE_{MMSE,t} = \frac{1}{L} E\left\{\left\|\mathbf{h}-\hat{\mathbf{h}}_{MMSE}\right\|^2\right\} = \ldots = \frac{1}{L} trace\left\{\mathbf{R}_{\mathbf{hh}} - \mathbf{R}_{\mathbf{h}\hat{\mathbf{h}}_{LS}} \mathbf{R}^{-1}_{\hat{\mathbf{h}}_{LS}\hat{\mathbf{h}}_{LS}} \mathbf{R}^{H}_{\mathbf{h}\hat{\mathbf{h}}_{LS}}\right\} \tag{4.64}$$

ενώ το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης στο πεδίο της συχνότητας, $\hat{\mathbf{H}} = \sqrt{N}\,\mathbf{F}\hat{\mathbf{h}}_{MMSE}$, θα ισούται για την περίπτωση όπου ο αριθμός των διαμορφωμένων υπο-φέρουσων του συστήματος είναι $N_u = N$ με

$$\begin{aligned} MSE_{MMSE,t\to f} &= (1/N)\,trace\left[E\left\{\left|\sqrt{N}\,\mathbf{F}\mathbf{h} - \sqrt{N}\,\mathbf{F}\hat{\mathbf{h}}_{MMSE}\right|^2\right\}\right] \\ &= trace\left[E\left\{\left|\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}_{MMSE}\right|^2\right\}\right] \\ &= L\cdot MSE_{MMSE,t} \end{aligned} \tag{4.65}$$

Αποδεικνύεται ότι η σχέση (4.42) που δίνει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης Wiener φίλτρου ισούται με την (4.65) για την περίπτωση FIR καναλιού. Επομένως ο αλγόριθμος έχει την ίδια απόδοση με το ιδεατό Wiener φίλτρο, με διαφορά στην υλοποίηση της εκτίμησης. Στην περίπτωση Wiener φίλτρου τάξεως $N_p - 1$, η πολυπλοκότητα είναι N_p πολλαπλασιασμοί ανά εκτίμηση. Ο αλγόριθμος της MMSE εκτίμησης της κρουστικής απόκρισης όπως περιγράφηκε παραπάνω απαιτεί για την εκτίμηση όλων των συχνοτήτων της $\{H(k)\}$ έναν IDFT N_p-σημείων, έναν DFT N-σημείων και L πολλαπλασιασμούς. Αν θεωρηθεί ότι ο DFT N-σημείων υλοποιείται μέσω του αλγορίθμου FFT με πολυπλοκότητα $(N/2)\mathbf{log}_2 N$ πολλαπλασιασμούς, προκύπτει ότι για την εκτίμηση ανά υπο-φέρουσα απαιτούνται $[(N_p/2)\mathbf{log}_2 N_p + L + (N/2)\mathbf{log}_2 N]/N$ πολλαπλασιασμοί. Για παράδειγμα, η MMSE εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης ενός συστήματος με $N = 128$, $L = 16$ και $N_p = 32$ απαιτεί 32 πολλαπλασιασμούς ανά εκτίμηση με χρήση Wiener φίλτρου, και 4,21 πολλαπλασιασμούς με τον αλγόριθμο MMSE εκτίμησης της κρουστικής απόκρισης.

Μειονέκτημα του αλγορίθμου ο περιορισμός του πλήθους των πιλοτικών συχνοτήτων σε δυνάμεις του 2 και η εφαρμογή του μόνο σε περιπτώσεις όπου το κανάλι περιγράφεται από ένα FIR φίλτρο.

4.7 ML/MAP εκτίμηση

Η μέθοδος αυτή δίνει εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης από την οποία μπορεί να προκύψει η συχνοτική απόκριση μέσω DFT. Σε αντίθεση όμως με την εκτίμηση μέσω IDFT-DFT, όπου οι αρχικές LS εκτιμήσεις μεταφέρονται στο πεδίο του χρόνου με “άμεση” εφαρμογή του IDFT σε αυτές, στην συγκεκριμένη περίπτωση η αναπαράσταση πίνακα των μετασχηματισμών IDFT-DFT οδηγεί σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα σημεία της κρουστικής απόκρισης.

Το διάνυσμα $\mathbf{H}_p$ της συχνοτικής απόκρισης στις πιλοτικές συχνότητες ισούται με

$$\mathbf{H}_p = \begin{bmatrix} H\left(k_{p_1}\right) \\ H\left(k_{p_2}\right) \\ \vdots \\ H\left(k_{p_{N_p}}\right) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi k_{p1}/N} & \cdots & e^{-j2\pi k_{p1}(L-1)/N} \\ 1 & e^{-j2\pi k_{p2}/N} & \cdots & e^{-j2\pi k_{p2}(L-1)/N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi k_{pN_p}/N} & \cdots & e^{-j2\pi k_{pN_p}(L-1)/N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{N_p \times L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} h(0) \\ h(1) \\ \vdots \\ h(L-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}_{L\times 1}} \tag{4.66}$$

Ο πίνακας $\mathbf{Q}$ σχηματίζεται από τις γραμμές του πίνακα $\sqrt{N}\,\mathbf{F}$ της (4.54) που αντιστοιχούν στις πιλοτικές συχνότητες. Εφόσον ο πίνακας $\mathbf{F}$ έχει ανεξάρτητες γραμμές και στήλες το ίδιο θα ισχύει και για τον $\mathbf{Q}$. Σημειώνεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{h}$ της (4.66) έχει διαστάσεις $L \times 1$ που σημαίνει ότι ο δέκτης έχει γνώση της μέγιστης διάρκειας του καναλιού. Συνδυάζοντας τις (3.4) και (4.66) προκύπτει το παρακάτω σύστημα N_p γραμμικών εξισώσεων :

$$\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} = \mathbf{Q}\mathbf{h} + \mathbf{W}_{LS} \tag{4.67}$$

όπου το διάνυσμα $\mathbf{W}_{LS}$ αντιπροσωπεύει θόρυβο ισχύος $\sigma^2_{W_{LS}} = 1/SNR$. Το ζητούμενο στην εξίσωση (4.67) είναι το διάνυσμα της κρουστικής απόκρισης $\mathbf{h}$. Αν το διάνυσμα $\mathbf{h}$ θεωρηθεί ως ντετερμινιστική ποσότητα, τότε η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας αυτού όπως θα δειχτεί παρακάτω, είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων του συστήματος (4.67). Γενικά για την επίλυση του συστήματος αυτού διακρίνονται τρεις περιπτώσεις και οι αντίστοιχες λύσεις τους [4]:

1. *Ο αριθμός των πιλοτικών συχνοτήτων είναι* $N_p < L$

   Η τάξη r του πίνακα Q είναι ίση με την τάξη των γραμμών του, δηλαδή $r = \mathbf{dim}\left(\langle \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_{N_p} \rangle\right) = N_p$, όπου $\mathbf{Q}_i$ είναι το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην i γραμμή του $\mathbf{Q}$. Σε μία τέτοια περίπτωση το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση.

2. *Ο αριθμός των πιλοτικών συχνοτήτων είναι* $N_p = L$

   Ο $\mathbf{Q}$ είναι τετραγωνικός, διαστάσεων $L \times L$, με τάξη $r = L$. Ένας τέτοιος πίνακας είναι αντιστρέψιμος, οπότε η εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης θα είναι η

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{Q}^{-1}\,\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \tag{4.68}$$

3. *Ο αριθμός των πιλοτικών συχνοτήτων είναι* $N_p > L$

   Η τάξη του $\mathbf{Q}$ ισούται με την τάξη των στηλών του, δηλαδή $r = \mathbf{dim}\left(\langle \mathbf{Q}^1, \mathbf{Q}^2, \ldots, \mathbf{Q}^L \rangle\right) = L$, όπου $\mathbf{Q}^i$ είναι το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην i στήλη του $\mathbf{Q}$. Η βέλτιστη λύση ενός τέτοιου συστήματος είναι η λύση ελαχίστων τετραγώνων η οποία δίνεται από την σχέση

$$\hat{\mathbf{h}} = \left(\mathbf{Q}^H\,\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^H\,\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \tag{4.69}$$

   Η (4.69) συμπίπτει με την (4.68) για $N_p = L$.

Οι παρατηρήσεις που μπορούν να γίνουν είναι οι εξής :

- Η πρώτη περίπτωση δεν δίνει μοναδική λύση εφόσον το σύστημα είναι απροσδιόριστο – ο αριθμός των εξισώσεων (N_p) είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων (L). Θεωρητικά, ακόμα και ένα τέτοιο σύστημα έχει λύση, της μορφής $\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{Q}^{+}\, \hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$, όπου $\mathbf{Q}^{+}$ ο ψευδοαντίστροφος του $\mathbf{Q}$ [4]. Πρακτικά όμως η λύση αυτής της μορφής απέχει πολύ από την πραγματική. Μια διαφορετική ερμηνεία της λανθασμένης εκτίμησης προκύπτει από την παρατήρηση ότι σύμφωνα με το θεώρημα δειγματοληψίας ο αριθμός N_p των πιλοτικών συχνοτήτων πρέπει να ισούται τουλάχιστον με τον αριθμό L των σημείων της κρουστικής για να μην υπάρχει φασματική επικάλυψη. Επιβεβαιώνεται δηλαδή, ο περιορισμός για τον αριθμό των πιλοτικών συχνοτήτων και από την ανάλυση της επίλυσης της (4.67).
- Η επίλυση του συστήματος (4.67) δεν υπαγορεύει συγκεκριμένες πιλοτικές συχνότητες. Στην ιδεατή περίπτωση όπου δεν υπάρχει θόρυβος το αποτέλεσμα είναι το ίδιο ανεξάρτητα της κατανομής των πιλοτικών συχνοτήτων. Στην περίπτωση όμως που υπάρχει θόρυβος, η ακρίβεια της εκτίμησης εξαρτάται από την κατανομή. Αποδεικνύεται [19] ότι η εκτίμηση με το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα προκύπτει για ομοιόμορφη κατανομή των πιλοτικών συχνοτήτων ανάμεσα στις N συχνότητες του συστήματος. Στην περίπτωση όπου οι διαμορφωμένες συχνότητες του συστήματος είναι $N_u < N$, η παραπάνω διαπίστωση γενικά δεν ισχύει [18].
- Η λύση της (4.69) μπορεί να αποδειχθεί ότι αποτελεί την εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood estimation) της κρουστικής απόκρισης στην περίπτωση που ο θόρυβος του συστήματος είναι κανονικός και επιπλέον λευκός ως εξής [18]. Η N_p -διάστατη πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας διανυσματικής μεταβλητής $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$ με δεδομένο ότι η κρουστική απόκριση ισούται με το διάνυσμα $\mathbf{h}$ δίνεται από την σχέση [3], [18] :

$$f_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}|\mathbf{h}}\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \mid \mathbf{h}\right) = \frac{1}{\pi^{N_p}\, \mathbf{det}\left(\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}\right)} \mathbf{exp}\left\{-\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} - \mathbf{Q}\mathbf{h}\right)^H \mathbf{C}^{-1}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}} \left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} - \mathbf{Q}\mathbf{h}\right)\right\} \quad (4.70)$$

όπου $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}$ είναι ο πίνακας συνδιασποράς της διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$ ο οποίος ισούται με $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}} = E\left\{\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} - \mathbf{Q}\mathbf{h}\right)\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} - \mathbf{Q}\mathbf{h}\right)^H\right\} = \mathbf{R}_{\mathbf{W}_{LS}\mathbf{W}_{LS}} = \sigma^2_{\mathbf{W}_{LS}}\, \mathbf{I}_{N_p}$, και $\mathbf{det}(.)$ η ορίζουσα του πίνακα της παρένθεσης. Η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας της κρουστικής απόκρισης $\mathbf{h}_{ML}$ ικανοποιεί την σχέση

$$\left.\frac{\partial \mathbf{log}\left[f_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}|\mathbf{h}}\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \mid \mathbf{h}\right)\right]}{\partial \mathbf{h}}\right|_{\mathbf{h}=\mathbf{h}_{ML}} = 0 \quad (4.71)$$

Η λύση της εξίσωσης είναι ίδια με την (4.69).

- Μία άλλη μεθοδολογία εκτίμησης του διανύσματος $\mathbf{h}$ είναι να θεωρηθεί ως στοχαστικό μέγεθος που περιγράφεται από την πυκνότητα πιθανότητας $f_{\mathbf{h}}(\mathbf{h})$ και η εκτίμηση του από το ληφθέν διάνυσμα

$\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$ να ισούται με την τιμή του διανύσματος $\mathbf{h}$ που μεγιστοποιεί την αποστεριόρι πυκνότητα πιθανότητας [3], δηλαδή :

$$\hat{\mathbf{h}} = \arg\max_{\mathbf{h}} f_{\mathbf{h}|\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}\left(\mathbf{h} \mid \hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\right), \tag{4.72}$$

όπου

$$f_{\mathbf{h}|\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}\left(\mathbf{h} \mid \hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\right) = \frac{f_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}|\mathbf{h}}\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \mid \mathbf{h}\right) f_{\mathbf{h}}\left(\mathbf{h}\right)}{f_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}}\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}\right)} = \frac{f_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}|\mathbf{h}}\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \mid \mathbf{h}\right) f_{\mathbf{h}}\left(\mathbf{h}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}|\mathbf{h}}\left(\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \mid \mathbf{h}\right) f_{\mathbf{h}}\left(\mathbf{h}\right) d\,\mathbf{h}}. \tag{4.73}$$

Εφόσον ο παρονομαστής είναι ανεξάρτητος του $\mathbf{h}$, η μεγιστοποίηση αφορά μόνο τον αριθμητή της (4.73). Στην περίπτωση όπου ο θόρυβος είναι κανονικός και λευκός και η $f_{\mathbf{h}}\left(\mathbf{h}\right)$ είναι της μορφής :

$$f_{\mathbf{h}}\left(\mathbf{h}\right) = \frac{1}{\pi^N \operatorname{\mathbf{det}}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{hh}}\right)} \mathbf{exp}\left\{-\mathbf{h}^H \mathbf{R}_{\mathbf{hh}}^{-1} \mathbf{h}\right\}, \tag{4.74}$$

δηλαδή τα σημεία της κρουστικής απόκρισης περιγράφονται από μιγαδικές κανονικές μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής των οποίων τα πραγματικά και φανταστικά μέρη είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους [3], η εκτίμηση βρίσκεται ότι ισούται με [18] :

$$\hat{\mathbf{h}}_{MAP} = \left(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} + \sigma_{W_{LS}}^2 \mathbf{R}_{\mathbf{hh}}^{-1}\right)^{-1} \mathbf{Q}^H \hat{\mathbf{H}}_{LS,p} \tag{4.75}$$

Η (4.75) συμπίπτει με την (4.69) για μεγάλες τιμές του SNR (είναι $\sigma_{W_{LS}}^2 = 1/SNR$).

- Σημαντικό ρόλο στην ακρίβεια της εκτίμησης παίζει η αρχική θεώρηση ότι το διάνυσμα $\mathbf{h}$ (άρα και το $\hat{\mathbf{h}}$) έχει διάσταση L όσα είναι και τα σημεία της κρουστικής απόκρισης. Η διαδικασία εκτίμησης του καναλιού θα ήταν ίδια αν είχε θεωρηθεί ότι το διάνυσμα $\mathbf{h}$ είναι διάστασης μέχρι $L' = N_p > L$ (προφανώς δεν μπορεί να θεωρηθεί $L' > N_p$ αφού τότε το σύστημα είναι απροσδιόριστο). Σε μία τέτοια περίπτωση η εκτίμηση $\hat{\mathbf{h}}$ θα χαρακτηρίζεται, εκτός από τα L πρώτα σημεία που θα αποτελούν την εκτίμηση των αντίστοιχων L σημείων της κρουστικής, και από τα τελευταία $L' - L$ σημεία που θα περιέχουν μόνο θόρυβο, επομένως η ακρίβεια της εκτίμησης θα είναι μικρότερη. Έτσι η γνώση της τιμής του L δίνει την καλύτερη εκτίμηση που ισοδύναμα σημαίνει μηδενισμός των σημείων που περιέχουν θόρυβο. Εφόσον αυτό δεν είναι γνωστό μπορεί να θεωρηθεί το μήκος της κυκλικής επέκτασης του συστήματος.

Θεωρώντας την γενική λύση της (4.69) και χρησιμοποιώντας την (4.67) η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας του καναλιού ισούται με

$$\hat{\mathbf{h}}_{ML} = \mathbf{h} + \left(\mathbf{Q}^H \mathbf{Q}\right)^{-1} \mathbf{Q}^H \mathbf{W}_{LS} \tag{4.76}$$

Μέτρο της ακρίβειας της εκτίμησης της (4.76) είναι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Εφόσον το ζητούμενο είναι η συχνοτική απόκριση στη συνέχεια θα υπολογιστεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης της συχνοτικής απόκρισης, η οποία προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier $\hat{\mathbf{H}}_{ML} = \sqrt{N}\,\mathbf{F}_{N\times L}\,\mathbf{h}_{ML}$ και το οποίο ισούται με $MSE_{ML} = (1/N)\,trace\left[E\left\{\left|\mathbf{H}-\hat{\mathbf{H}}_{ML}\right|^2\right\}\right]$. Ο δείκτης ML στην εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης προκύπτει από την ιδιότητα της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας σύμφωνα με την οποία αν $\psi(\theta)$ είναι μία άγνωστη παράμετρος που εξαρτάται από την παράμετρο θ τότε η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας της ψ είναι η $\hat{\psi}_{ML} = \psi\left(\hat{\theta}_{ML}\right)$ [3]. Ο πίνακας $\mathbf{F}_{N\times L}$ αποτελείται από τις L πρώτες στήλες του πίνακα $\mathbf{F}$ της (4.54).

Ισχύει :

$$\begin{aligned} E\left\{\left|\mathbf{H}-\hat{\mathbf{H}}_{ML}\right|^2\right\} &= E\left\{\left|\sqrt{N}\,\mathbf{F}_{N\times L}\,\mathbf{h}-\sqrt{N}\,\mathbf{F}_{N\times L}\,\hat{\mathbf{h}}_{ML}\right|^2\right\} = E\left\{\left|\sqrt{N}\,\mathbf{F}_{N\times L}\,\mathbf{h}-\sqrt{N}\,\mathbf{F}_{N\times L}\left(\mathbf{h}+\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^H\,\mathbf{W}_{LS}\right)\right|^2\right\} \\ &= N\cdot E\left\{\left|\mathbf{F}_{N\times L}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^H\,\mathbf{W}_{LS}\right|^2\right\} = N\cdot E\left\{\mathbf{F}_{N\times L}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^H\,\mathbf{W}_{LS}\,\mathbf{W}_{LS}^H\,\mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-H}\mathbf{F}_{N\times L}^H\right\} \\ &= N\cdot\mathbf{F}_{N\times L}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{Q}^H\,E\left\{\mathbf{W}_{LS}\,\mathbf{W}_{LS}^H\right\}\mathbf{Q}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-H}\mathbf{F}_{N\times L}^H, \end{aligned} \tag{4.77}$$

και με χρήση των σχέσεων

$$E\left\{\mathbf{W}_{LS}\,\mathbf{W}_{LS}^H\right\} = \frac{1}{SNR}\mathbf{I}_{N_p}\,,\ \left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-H} = \left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1} \tag{4.78}$$

προκύπτει ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης στο πεδίο της συχνότητας είναι ίσο με

$$MSE_{ML} = \frac{1}{SNR}\cdot trace\left\{\mathbf{F}_{N\times L}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{F}_{N\times L}^H\right\} = \frac{1}{SNR}\cdot trace\left\{\mathbf{F}_{N\times L}^H\,\mathbf{F}_{N\times L}\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1}\right\} \tag{4.79}$$

Ισχύει $\mathbf{F}_{N\times L}^H\,\mathbf{F}_{N\times L} = \mathbf{I}_L$ ενώ για την περίπτωση ομοιόμορφης κατανομής των πιλοτικών συχνοτήτων ισχύει $\left(\mathbf{Q}^H\mathbf{Q}\right)^{-1} = (1/N_p)\,\mathbf{I}_L$, οπότε προκύπτει :

$$MSE_{ML} = \frac{L}{N_p\cdot SNR} \tag{4.80}$$

Η σχέση (4.80) είναι ίδια με την (4.27) που δίνει το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης με IDFT-DFT φίλτρο. Όμως ο αλγόριθμος εκτίμησης καναλιού της (4.69) έχει αρκετά μικρότερη πολυπλοκότητα. Η εκτίμηση κάθε σημείου της συχνοτικής απόκρισης απαιτεί $[N_pL+(N/2)\mathbf{log}_2 N]/N$ πολλαπλασιασμούς, με τον πρώτο όρο του αριθμητή να οφείλεται στον πολλαπλασιασμό της (4.69) και ο δεύτερος για τον FFT N-σημείων. Σημειώνεται ότι η μέθοδος εκτίμησης της κρουστικής από την επίλυση του συστήματος (4.67) δεν επιβάλει περιορισμό στον αριθμό N_p (δύναμη του 2) όπως συμβαίνει στην εκτίμηση με άμεση χρήση IDFT.

4.8 Σύνοψη των χαρακτηριστικών των αλγορίθμων

Στον πίνακα ΙΙ παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι επεξεργασίας σήματος σε μία διάσταση που παρουσιάστηκαν παραπάνω και τα χαρακτηριστικά τους, για OFDM σύστημα με αριθμό υπο-φέρουσων N, αριθμό πιλοτικών συχνοτήτων N_p και κανάλι διακριτής κρουστικής απόκρισης L σημείων.

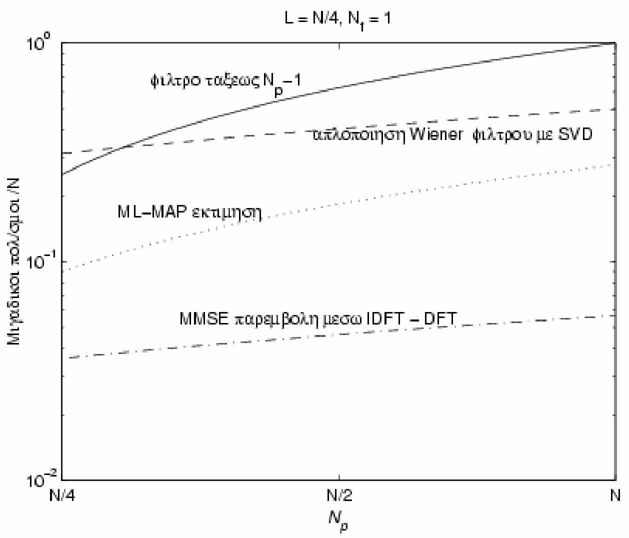
Το πρώτο χαρακτηριστικό αφορά την πολυπλοκότητα της υλοποίησης του αλγορίθμου και ως μέτρο σύγκρισης θεωρείται ο αριθμός των μιγαδικών πολλαπλασιασμών που απαιτείται ανά εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης σε μία υπο-φέρουσα. Ένα συγκριτικό διάγραμμα φαίνεται στο σχήμα 4-11 για την περίπτωση FIR καναλιού $L = N/4$ σημείων συναρτήσει του αριθμού των πιλοτικών συχνοτήτων, όπου είναι εμφανής η υπεροχή του αλγορίθμου MMSE παρεμβολής με χρήση των IFFT-FFT όσον αφορά την πολυπλοκότητα. Το μειονέκτημα του αλγορίθμου είναι ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες, σε αντίθεση με τους υπόλοιπους.

Όσον αφορά την ανάγκη γνώσης της στατιστικής του καναλιού και/ή του θορύβου, οι αλγόριθμοι που δεν την αξιοποιούν και συνεπώς δεν είναι απαραίτητη για την λειτουργία τους είναι η πολυωνυμική παρεμβολή και η παρεμβολή μέσω IDFT-DFT. Οι αλγόριθμοι αυτοί δεν κάνουν χρήση ούτε της θεώρησης για την διάρκεια του καναλιού $\tau_{\max} \le T_{cp}$. Γνώση της διάρκειας του καναλιού μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην εφαρμογή του IDFT-DFT φίλτρου και της ML εκτίμησης, ενώ οι υπόλοιποι αλγόριθμοι μπορούν να εκμεταλλευτούν την γνώση της στατιστικής καναλιού και θορύβου για μεγαλύτερη ακρίβεια της εκτίμησης. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι αλγόριθμοι αυτοί μπορούν να εφαρμοστούν και σε περιπτώσεις όπου η στατιστική είναι άγνωστη, με την προσαρμογή στις χειρότερες συνθήκες που θα αντιμετωπίσει το σύστημα, με μείωση της απόδοσής τους.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ

Αλγόριθμος	*Πολλαπλασιασμοί ανά εκτίμηση*	*Εφαρμογή σε συστήματα με αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες*	*Χρήση πληροφορίας καναλιού-θορύβου*
πολυωνυμική παρεμβολή	Μεταβλητή (Γραμμική : 2)	√	×
IDFT – DFT φίλτρο	N_p	×	×
Φίλτρο Wiener (MMSE εκτίμηση)	$K_p \le N_p$	√	√
Απλοποίηση Wiener φίλτρου μέσω SVD	$r(1+N_p/N)$	√	√
Παρεμβολή μέσω IDFT-DFT	$[(N_p/2)\mathbf{log}_2 N_p + (N/2)\mathbf{log}_2 N]/N$	×	×
MMSE παρεμβολή μέσω IDFT-DFT	$[(N_p/2)\mathbf{log}_2 N_p + L + (N/2)\mathbf{log}_2 N]/N$	×	√
ML/MAP εκτίμηση	$[N_p L + (N/2)\mathbf{log}_2 N]/N$	√	√

N : αριθμός υπο-φέρουσων OFDM συστήματος
N_p : αριθμός πιλοτικών συχνοτήτων
L : διάρκεια κρουστικής απόκρισης καναλιού
r : αριθμός μη αμελητέων ιδιοτιμών του πίνακα αυτοσυσχέτισης $\mathbf{R}_{\mathbf{HH}}$



Σχήμα 4-11 Πολυπλοκότητα των αλγορίθμων εκτίμησης καναλιού με επεξεργασία σήματος σε μία διάσταση συναρτήσει του αριθμού των πιλότων

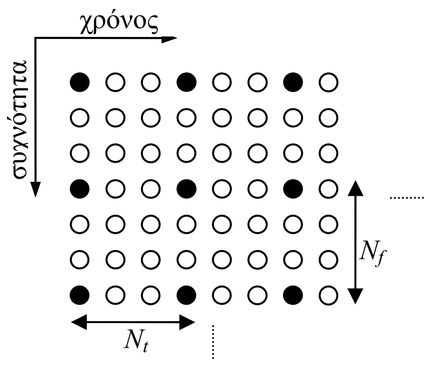
5. *Εκτίμηση Καναλιού με Επεξεργασία Σήματος στις Δύο Διαστάσεις*

5.1 Δειγματοληψία στις δύο διαστάσεις και συχνότητα δειγματοληψίας

Όπως και στην περίπτωση της μονοδιάστατης επεξεργασίας σήματος, βασική προϋπόθεση για την ακριβή εκτίμηση του καναλιού είναι η ικανοποίηση του θεωρήματος δειγματοληψίας. Οι δισδιάστατοι αλγόριθμοι πρακτικά δειγματοληπτούν μία διαδικασία, που είναι η χρονικά μεταβαλλόμενη συχνοτική απόκριση, σε συγκεκριμένες συχνότητες και χρονικές στιγμές, με κάποια καθορισμένη κατανομή πιλότων. Το διακριτό σήμα που προκύπτει απουσία θορύβου περιγράφεται από την σχέση :

$$H(m,k) \equiv H_c\Big(m \cdot N_t\big(N + N_{cp}\big)T_s, k \cdot j2\pi N_f \Delta f\Big). \tag{5.1}$$

Με N_t συμβολίζεται η απόσταση σε OFDM σύμβολα μεταξύ διαδοχικών πιλότων στο πεδίο του χρόνου (σχήμα 5.1), ενώ η $H_c(t,f)$ εκφράζει την συνεχή συχνοτική απόκριση του συστήματος. Για να είναι δυνατή η ανασύσταση της διαδικασίας από τα δείγματά της πρέπει να είναι πεπερασμένη στο δισδιάστατο πεδίο Fourier αυτής, και επιπλέον η συχνότητα δειγματοληψίας να είναι αρκετά μεγάλη ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη φάσματος.



Σχήμα 5-1 Τετραγωνική κατανομή πιλότων στο δισδιάστατο πλέγμα συχνότητας-χρόνου

Η συχνοτική απόκριση σαν δισδιάστατη διαδικασία περιγράφεται συναρτήσει της μεταβλητής f που αντιστοιχεί στο πεδίο της συχνότητας, και της μεταβλητής t που αντιστοιχεί στο πεδίο του χρόνου. Ο δισδιάστατος μετασχηματισμός Fourier θα είναι και αυτός συνάρτηση δύο μεταβλητών και συγκεκριμένα της χρονικής καθυστέρησης τ και της συχνότητας λ, οι οποίες είναι οι μεταβλητές των πεδίων Fourier των μεταβλητών f και t αντίστοιχα. Το πεπερασμένο φάσμα της συχνοτικής απόκρισης εκφράζεται από την πεπερασμένη μέγιστη καθυστέρηση $\tau_{\max}$ της κρουστικής απόκρισης και την πεπερασμένη μέγιστη συχνότητα Doppler, $f_{d,\max}$.

Ο περιορισμός στην απόσταση των πιλότων στο πεδίο της συχνότητας f αναλύθηκε παραπάνω, όπου προέκυψε ότι η μέγιστη απόσταση των πιλοτικών συχνοτήτων προκειμένου να ικανοποιείται το θεώρημα δειγματοληψίας είναι $N_f \le 1/(\Delta f \tau_m)$. Στο πεδίο του χρόνου t η συχνότητα δειγματοληψίας ισούται με $\left(N_t\left(N+N_{cp}\right)T_s\right)^{-1}$ και θα πρέπει να ικανοποιεί την σχέση $\left(N_t\left(N+N_{cp}\right)T_s\right)^{-1} \le 2f_{d,\max}$, ή ισοδύναμα [13] :

$$N_t \le \frac{1}{2f_{d,\max}\left(N+cp\right)T_s} \tag{5.2}$$

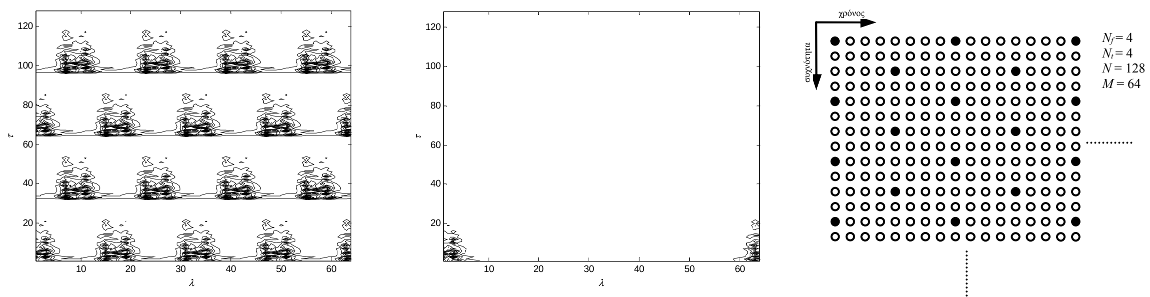
Λόγω τις παρουσίας θορύβου η δειγματοληπτημένη συχνοτική απόκριση θα περιγράφεται σε αντιστοιχία με την (3.4) από την σχέση

$$\hat{H}_{LS}\left(m_p,k_p\right)=H\left(m_p,k_p\right)+W_{LS}\left(m_p,k_p\right), \tag{5.3}$$

όπου οι δείκτες $m_p \in P_m \subseteq \{1,2,\ldots,M\}$, $k_p \in P_k \subseteq \{0,1,\ldots,N-1\}$ αντιστοιχούν σε πιλοτικά σύμβολα. P_m είναι το σύνολο των OFDM συμβόλων που μεταφέρουν πιλότους και P_k είναι το σύνολο των πιλοτικών συχνοτήτων. M είναι ο αριθμός των εισερχόμενων στον δέκτη OFDM συμβολών, βάση των οποίων γίνεται η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης. Η (5.3) αποτελεί την αρχική εκτίμηση στις πιλοτικά σημεία από την οποία προκύπτει η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης.

5.2 Φίλτρα

Όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση, η θεωρία δειγματοληψίας και ανασύστασης σήματος (στις δύο διαστάσεις) μπορεί να εφαρμοσθεί για την εκτίμηση του καναλιού. Ο δισδιάστατος αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της δειγματοληπτημένης συχνοτικής απόκρισης $H(m_p,k_p)$ θα αποτελείται από αντίγραφα της συνάρτησης $S(\tau,\lambda)=F^{-1}\{H(t,f)\}$ η οποία είναι πεπερασμένη στο διάστημα $0 \le \tau \le \tau_m$ και $-f_{d,\max} \le \lambda \le f_{d,\max}$, και είναι χαρακτηριστική του καναλιού. Στο σχήμα 5-2-1 φαίνεται το μέτρο του δισδιάστατου IDFT της $H(m_p,k_p)$, $m_p \in P_m$, $k_p \in P_k$, [18] με την κατανομή πιλότων του σχήματος 5-2-3 και ο δισδιάστατος IDFT της $H(m,k)$, $1 \le m \le M$, $0 \le k \le N-1$ (σχήμα 5-2-2). Για την ανασύσταση του σήματος θα πρέπει το φάσμα "βασικής ζώνης" να απομονωθεί αποκόπτοντας ταυτόχρονα ένα ποσοστό του θορύβου όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει με κατάλληλου εύρους ζώνης δισδιάστατο φίλτρο.

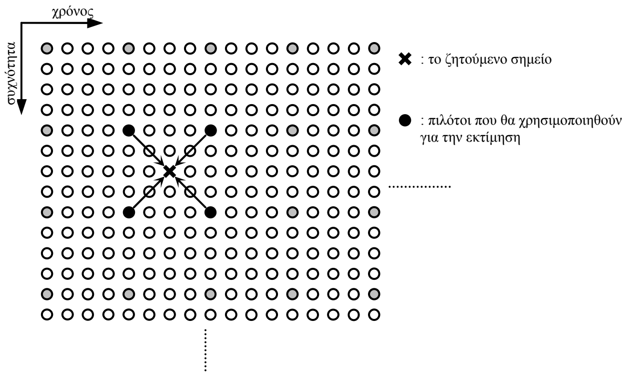


1 2 3

Σχήμα 5-2 Δισδιάστατο φάσμα της δειγματοληπτημένης συχνοτικής απόκρισης

5.2.1 Wiener φίλτρα – MMSE εκτίμηση

Όπως και στην περίπτωση της μονοδιάστατης εκτίμησης η χρήση φίλτρου είναι ικανή να μειώσει την επίδραση του θορύβου των αρχικών εκτιμήσεων, ενώ η πολυπλοκότητά του μπορεί να μειωθεί πολύ με χρήση του δισδιάστατου μετασχηματισμού Fourier και τον αλγόριθμο FFT. Στην περίπτωση που είναι γνωστή η στατιστική του καναλιού και ο θόρυβος του συστήματος, μεγαλύτερη ακρίβεια δίνει η εκτίμηση ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MMSE). Για την απλούστερη εξαγωγή της MMSE εκτίμησης, η ανάλυση θα γίνει για "τετραγωνική" κατανομή πιλότων, όπως αυτή του σχήματος 5-3 θεωρώντας ότι έχουν ληφθεί M OFDM σύμβολα από τα οποία M_p είναι πιλοτικά και περιέχουν το καθένα N_p πιλότους. Τα αποτελέσματα εύκολα γενικεύονται για οποιαδήποτε κατανομή πιλότων.



Σχήμα 5-3 Εκτίμηση με επεξεργασία σήματος σε δύο διαστάσεις με χρήση K_p πιλότων

Το ζητούμενο είναι η εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης $\hat{H}_{MMSE}(m,k)$ ως γραμμικός συνδυασμός των αρχικών LS εκτιμήσεων, δηλαδή $\hat{H}_{MMSE}(m,k) = \mathbf{a}_{(m,k)}^T \hat{\mathbf{H}}_{LS,(m,k)}$, όπου $\hat{\mathbf{H}}_{LS,(m,k)} = \left[\hat{H}_{LS}(m_{p_1},k_{p_1}),\ldots,\hat{H}_{LS}\left(m_{p_1},k_{p_{K_p^f}}\right),\hat{H}_{LS}(m_{p_2},k_{p_1}),\ldots\ldots,\hat{H}_{LS}\left(m_{p_{K_p^t}},k_{p_{K_p^f}}\right)\right]^T$ το $K_p^f K_p^t \times 1$ διάνυσμα των LS εκτιμήσεων στα πιλοτικά σημεία και $\mathbf{a}_{(m,k)}$ το $K_p^f K_p^t \times 1$ διάνυσμα που περιγράφει τα σημεία του MMSE φίλτρου. $K_p^f \le N_p$ είναι ο αριθμός των πιλοτικών συχνοτήτων που περιγράφονται από το σύνολο

$\left\{k_{p_1},k_{p_2},\ldots,k_{p_{K_p^f}}\right\}$ και $K_p^t \le M_p$ είναι ο αριθμός των πιλοτικών OFDM συμβόλων και περιγράφονται από το σύνολο $\left\{m_{p_1},m_{p_2},\ldots,m_{p_{K_p^t}}\right\}$ (θεωρείται ότι γίνεται χρήση των ίδιων πιλοτικών συχνοτήτων από τα K_p^t πιλοτικά OFDM σύμβολα). Ο δείκτης (m,k) στον συμβολισμό των πινάκων $\hat{\mathbf{H}}_{LS}$ και $\mathbf{a}$ υποδηλώνει την γενική περίπτωση όπου η εκτίμηση σε κάθε σημείο γίνεται χρησιμοποιώντας διαφορετικό σύνολο πιλότων $\{k_{p_i}\}_{i=1}^{K_p^f}$ και $\{m_{p_i}\}_{i=1}^{K_p^t}$, και οι τιμές των σημείων του φίλτρου $\mathbf{a}$ εξαρτώνται από την θέση αυτών στο δισδιάστατο πλέγμα συχνότητας-χρόνου. Για απλοποίηση της σημειολογίας ο δείκτης (m,k) θα αφαιρεθεί στην συνέχεια από τα $\hat{\mathbf{H}}_{LS}$ και $\mathbf{a}$.

Με αντίστοιχο τρόπο με την μονοδιάστατη περίπτωση προκύπτει ότι το διάνυσμα $\mathbf{a}^T$ θα ισούται με

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{R}_{H(m,k)\hat{\mathbf{H}}_{LS}} \mathbf{R}^{-1}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}} . \tag{5.4}$$

Οι πίνακες αυτοσυσχέτισης ισούνται με

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{H(m,k)\hat{\mathbf{H}}_{LS}} &= E\left\{H(m,k)\cdot\left[\hat{H}_{LS}^*\left(m_{p_1},k_{p_1}\right),\ldots,\hat{H}_{LS}^*\left(m_{p_{K_p^t}},k_{p_{K_p^f}}\right)\right]\right\}\\
&=\left[r_H\left(m-m_{p_1},k-k_{p_1}\right),\ldots,r_H\left(m-m_{p_{K_p^t}},k-k_{p_{K_p^f}}\right)\right].\\
\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}} &= E\left\{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}^H\right\} = E\left\{\left(\mathbf{H}_p+\mathbf{W}_{LS,p}\right)\left(\mathbf{H}_p+\mathbf{W}_{LS,p}\right)^H\right\}\\
&= \mathbf{R}_{\mathbf{H}_p\mathbf{H}_p}+\frac{1}{SNR}\mathbf{I},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

όπου $\mathbf{H}_p = \left[H(m_{p_1},k_{p_1}),\ldots,H\left(m_{p_{K_p^t}},k_{p_{K_p^f}}\right)\right]^T$ το διάνυσμα με τις τιμές της συχνοτικής απόκρισης στα πιλοτικά σημεία, ενώ τα στοιχεία του πίνακα αυτοσυσχέτισης $\mathbf{R}_{\mathbf{H}_p\mathbf{H}_p}$ δίνονται από την σχέση $[\mathbf{R}_{\mathbf{H}_p\mathbf{H}_p}]_{i,j} = r_H\left(m_{p_i}-m_{p_j},k_{p_i}-k_{p_j}\right)$ (2.27). Επομένως η MMSE εκτίμηση δίνεται από την σχέση :

$$\hat{H}_{MMSE}(m,k) = \mathbf{R}_{H(m,k)\mathbf{H}_p}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{H}_p\mathbf{H}_p}+\frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}\hat{\mathbf{H}}_{LS} . \tag{5.6}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης για το σημείο (m,k) είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
MSE_{2-D}(m,k) &= E\left\{\left(H(m,k)-\mathbf{a}^T\hat{\mathbf{H}}_{LS,(m,k)}\right)\left(H(m,k)-\mathbf{a}^T\hat{\mathbf{H}}_{LS,(m,k)}\right)^H\right\}=\cdots\\
&= E\left\{\left|H(m,k)\right|^2\right\}-\mathbf{R}_{\mathbf{H}\mathbf{H}_p}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{H}_p\mathbf{H}_p}+\frac{1}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{H}\mathbf{H}_p}^H
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Η διαφορά της ακρίβειας της εκτίμησης σε κάθε σημείο οφείλεται στο διαφορετικό σύνολο πιλότων που χρησιμοποιούνται και στην διαφορετική συσχέτιση μεταξύ ζητούμενου σημείου και πιλότων. Γενικά τα ακραία σημεία στο δισδιάστατο πλέγμα συχνότητας – χρόνου θα έχουν μικρότερη ακρίβεια στην εκτίμηση εφόσον δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν συμμετρικοί πιλότοι γύρω από αυτά.

Στην περίπτωση όπου υπάρχει απόκλιση μεταξύ της πραγματικής στατιστικής του καναλιού και αυτής που θεωρεί ο δέκτης, το σφάλμα θα είναι μεγαλύτερο από αυτό της (5.7). Όπως και στην μονοδιάστατη περίπτωση, έτσι και εδώ μπορεί να θεωρηθεί η χειρότερη περίπτωση καναλιού που θα αντιμετωπίσει το σύστημα για την προσαρμογή του φίλτρου. Αναφέρθηκε παραπάνω ότι αυτό σημαίνει θεώρηση ομοιόμορφης κατανομής της ισχύος στα σημεία της κρουστικής, ενώ αποδεικνύεται [23] ότι το φίλτρο που ανταποκρίνεται σε κάθε μορφή μεταβολής του καναλιού στο πεδίο του χρόνου είναι αυτό το οποίο είναι προσαρμοσμένο σε μεταβολή που περιγράφεται από ομοιόμορφη κατανομή φασματικής ισχύος στο πεδίο λ με μέγιστη συχνότητα ίση ή μεγαλύτερη από την μέγιστη συχνότητα Doppler.

Η ακρίβεια της εκτίμησης εξαρτάται από τον αριθμό των πιλότων, εφόσον μεγαλύτερος αριθμός πιλότων σημαίνει και μεγαλύτερη πληροφορία για το κανάλι στην περιοχή της εκτίμησης. Όμως και η πολυπλοκότητα της εκτίμησης εξαρτάται από τον αριθμό των πιλότων. Χρήση $K_p = K_p^f K_p^t$ πιλότων σημαίνει K_p πολλαπλασιασμούς για κάθε εκτίμηση, επομένως πρέπει να γίνει ένας συμβιβασμός μεταξύ ακρίβειας και πολυπλοκότητας της εκτίμησης. Επιπλέον πρέπει να γίνει επιλογή των K_p πιλότων για την εκτίμηση σε κάθε σημείο. Η βέλτιστη επιλογή είναι να θεωρηθούν οι πιλότοι που ελαχιστοποιούν το σφάλμα της (5.7) το οποίο σημαίνει ότι για κάθε σημείο θα πρέπει να ελεγχθούν $\binom{N_p M_p}{K_p^f K_p^t}$ πιθανές επιλογές. Επειδή η διαδικασία αυτή είναι πρακτικά αδύνατον να εφαρμοστεί χρησιμοποιείται το πιο συνηθισμένο κριτήριο της επιλογής των πλησιέστερων στο ζητούμενο σημείο πιλότων. Η απόσταση μεταξύ του σημείου (m,k) και του πιλοτικού σημείου (m_p,k_p) μπορεί να ορισθεί ως εξής [14], [15]:

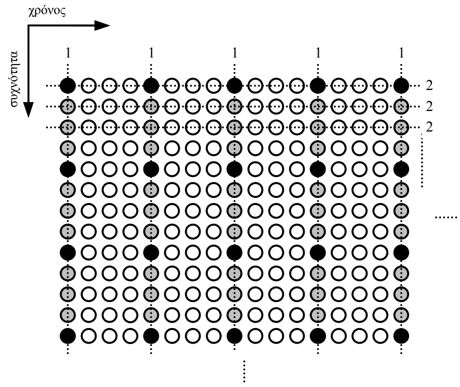
- $D\{(m_p,k_p),(m,k)\} = \sqrt{(k-k_p)^2 + (m-m_p)^2}$ (Ευκλείδεια απόσταση)
- $D\{(m_p,k_p),(m,k)\} = |k-k_p|\tau_m \Delta f + |m-m_p| f_{d,\max} N T_s$

Το δεύτερο κριτήριο δίνει καλύτερα αποτελέσματα εφόσον λαμβάνει υπ' όψιν την στατιστική του καναλιού. Για παράδειγμα, εάν η συχνοτική απόκριση μεταβάλλεται γρήγορα ως προς τον χρόνο (μεγάλη συχνότητα Doppler) και αργά ως προς την συχνότητα (μικρή διάρκεια κρουστικής), η αυτοσυσχέτιση στο χρόνο θα είναι μικρότερη από την αντίστοιχη στην συχνότητα, άρα η επιλογή περισσότερων πιλότων που βρίσκονται χρονικά κοντά στο ζητούμενο σημείο θα δώσει περισσότερη πληροφορία.

5.3 Διαχωρισμός των φίλτρων

Ο διαχωρισμός της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της συχνοτικής απόκρισης στο γινόμενο της αυτοσυσχέτισης στο πεδίο του χρόνου με την αυτοσυσχέτιση στο πεδίο της συχνότητας (σχέση (2.27)), επιτρέπει τον διαχωρισμό του δισδιάστατου προβλήματος σε δύο ανεξάρτητα μονοδιάστατα με την εκτίμηση να γίνεται πρώτα στο ένα πεδίο και μετά στο άλλο [13-16]. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να μειωθεί κατά πολύ η πολυπλοκότητα της εκτίμησης.

Η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 5-4. Έστω ότι πρώτα γίνεται η εκτίμηση στο πεδίο της συχνότητας. Για κάθε πιλοτικό OFDM σύμβολο γίνεται η εκτίμηση σε όλες τις συχνότητες με κατάλληλα φίλτρα, τα οποία χρησιμοποιούν την πληροφορία των πιλότων (μαύρα σημεία στο σχήμα). Η εκτίμηση του καναλιού στα πιλοτικά OFDM σύμβολα (γκρι σημεία) δίνει την απαραίτητη πληροφορία για την χρήση των φίλτρων στο πεδίο του χρόνου, από τα οποία θα προκύψει και η τελική εκτίμηση του καναλιού. Λόγω γραμμικότητας η εκτίμηση θα είναι ίδια εάν η σειρά με την οποία εφαρμοσθούν τα φίλτρα είναι διαφορετική.



Σχήμα 5-4 Εκτίμηση με ξεχωριστή εφαρμογή των φίλτρων στο πεδίο της συχνότητας και του χρόνου

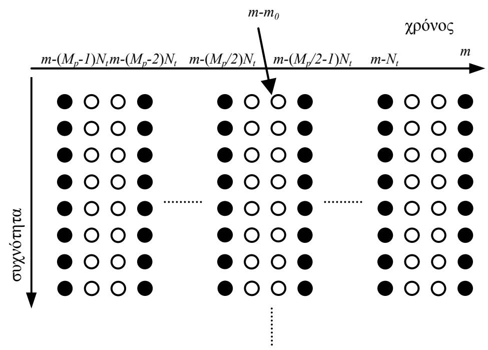
Προφανώς ότι αναφέρθηκε παραπάνω για την χρήση των φίλτρων σε μία διάσταση ισχύει και εδώ. Τα φίλτρα προσαρμόζονται σύμφωνα με την στατιστική του καναλιού και τον θόρυβο του συστήματος εάν είναι γνωστή. Επειδή όμως η εκτίμηση που προκύπτει από το πρώτο φίλτρο ελαττώνει αρκετά την ισχύ του θορύβου, μεγαλύτερη ακρίβεια στην εκτίμηση του δεύτερου φίλτρου θα δώσει η προσαρμογή του στην ισχύ του θορύβου των εκτιμήσεων του πρώτου φίλτρου και όχι σε αυτή του συστήματος.

Εάν το φίλτρο στο πεδίο της συχνότητας είναι τάξης K_p^f και το φίλτρο στο πεδίο της συχνότητας είναι τάξης K_p^t τότε μία προσέγγιση των πολλαπλασιασμών που απαιτείται για την κάθε εκτίμηση είναι $K_p^f / N_t + K_p^t$ πολλαπλασιασμοί [13], εφόσον το φίλτρο στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται κάθε N_t OFDM σύμβολα (για την περίπτωση που αυτό χρησιμοποιείται πρώτο). Η μείωση της πολυπλοκότητας είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με το δισδιάστατο Wiener φίλτρο που αναφέρθηκε παραπάνω και στην πράξη η εκτίμηση στις δύο διαστάσεις γίνεται πάντα με διαχωρισμό των φίλτρων. Η πολυπλοκότητα μπορεί να μειωθεί ακόμα περισσότερο με εφαρμογή των μεθόδων μείωσης της πολυπλοκότητας των μονοδιάστατων φίλτρων που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο της μονοδιάστατης επεξεργασίας σήματος. Μία από αυτές είναι η χρήση του μετασχηματισμού SVD. Για το φίλτρο στο πεδίο της συχνότητας αναφέρθηκε ότι μία καλή προσέγγιση του αριθμού r_f μη αμελητέων ιδιοτιμών είναι ο αριθμός L των σημείων της κρουστικής απόκρισης ενώ για το φίλτρο στο πεδίο του χρόνου προκύπτει με αντίστοιχο τρόπο ότι οι μη αμελητέες ιδιοτιμές είναι περίπου ίσες με $r_t = 2 f_{d,\max} (N + N_{cp}) T_s M$.

5.4 Εκτίμηση του καναλιού στο πεδίο του χρόνου

Στην μονοδιάστατη εκτίμηση του καναλιού, η εκτίμηση του καναλιού στο πεδίο του χρόνου παρέχει την δυνατότητα μείωσης της πολυπλοκότητας εφόσον εκεί η ενέργεια του καναλιού είναι συγκεντρωμένη σε μικρότερο αριθμό σημείων (L) σε σχέση με το πεδίο της συχνότητας (N). Η εκτίμηση στο πεδίο του χρόνου μπορεί να βελτιωθεί με την εφαρμογή φίλτρων που μειώνουν ακόμα περισσότερο την ισχύ του θορύβου της εκτίμησης.

Θεωρώντας ότι τα πιλοτικά OFDM σύμβολα έχουν όλες τις συχνότητες πιλοτικές (σχήμα 5-5), το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της συχνοτικής απόκρισης $\hat{\mathbf{H}}_{m-m_0}$ την χρονική στιγμή $m-m_0$, με βάση την εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης στα πιλοτικά OFDM σύμβολα που περιγράφεται από το $M_p N \times 1$ διάνυσμα $\hat{\mathbf{H}}_{LS} = \left[\hat{\mathbf{H}}^T_{LS,m}, \hat{\mathbf{H}}^T_{LS,m-N_t}, \ldots, \hat{\mathbf{H}}^T_{LS,m-(M_p-1)N_t}\right]$, όπου $\hat{\mathbf{H}}_{LS,m}$ το $N \times 1$ διάνυσμα της LS εκτίμησης την χρονική στιγμή m. Οι δείκτες δεν περιλαμβάνουν την συχνότητα εφόσον η εκτίμηση γίνεται ταυτόχρονα σε όλες τις συχνότητες του OFDM συμβόλου.



Σχήμα 5-5 Κατανομή πιλότων για την δισδιάστατη εκτίμηση του καναλιού στο πεδίο του χρόνου

Η MMSE εκτίμηση είναι η

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE,m-m_0} = \mathbf{R}_{\mathbf{H}_{m-m_0}\hat{\mathbf{H}}_{LS}} \mathbf{R}^{-1}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS}\hat{\mathbf{H}}_{LS}} \hat{\mathbf{H}}_{LS} . \tag{5.8}$$

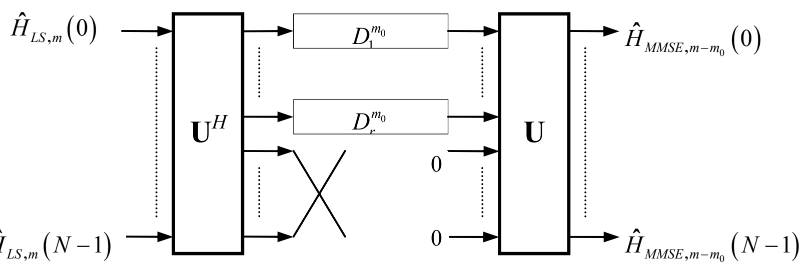
Χρησιμοποιώντας την (4.46) και την σχέση $\mathbf{R}_{\hat{\mathbf{H}}_{LS,m1}\hat{\mathbf{H}}_{LS,m2}} = r_t(m_1 - m_2)\mathbf{R}_{\mathbf{HH}} + (1/SNR)\delta(m_1 - m_2)\mathbf{I}_N$, η (5.8) απλοποιείται στην :

$$\hat{\mathbf{H}}_{MMSE}, m - m_0 = \mathbf{U}\boldsymbol{\Delta}_{m_0} D\left(\left[\underbrace{\mathbf{U}^H, \mathbf{U}^H, \ldots, \mathbf{U}^H}_{M_p \text{ φορες}}\right]\right)\hat{\mathbf{H}}_{LS} \tag{5.9}$$

όπου ο Δ_{m_0} είναι της μορφής [28] :

$$\begin{aligned}\Delta_{m_0} = \big[& D\left(\left[\underbrace{\delta_1^{m_0}(0), \delta_2^{m_0}(0), \ldots, \delta_r^{m_0}(0), 0, \ldots, 0}_{N \text{ στοιχεια}}\right]\right), D\left(\left[\delta_1^{m_0}(1), \delta_2^{m_0}(1), \ldots, \delta_r^{m_0}(1), 0, \ldots, 0\right]\right), \ldots \\ & \ldots, D\left(\left[\delta_1^{m_0}(M_p - 1), \delta_2^{m_0}(M_p - 1), \ldots, \delta_r^{m_0}(M_p - 1), 0, \ldots, 0\right]\right)\big]\end{aligned} \tag{5.10}$$

με τα στοιχεία $\delta_i^{m_0}(j)$ να εξαρτώνται από την χρονική στιγμή m_0, την αυτοσυσχέτιση του καναλιού στο χρόνο, και τις ιδιοτιμές λ_i του πίνακα $\mathbf{R_{HH}}$, οι οποίες για $i > r$ θεωρούνται μηδενικές. Όπως αναφέρθηκε παραπάνω ο μετασχηματισμός $\mathbf{U}$ αντιστοιχεί στον διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Η παραπάνω διαδικασία εκτίμησης του καναλιού περιγράφεται από το σχήμα 5-6.



Σχήμα 5-6 Εκτίμηση στο πεδίο του χρόνου με χρήση φίλτρων

Η διαδικασία αποτελεί γενίκευση της μονοδιάστατης MMSE εκτίμησης με χρήση SVD του σχήματος 4-10. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το i σημείο της εκτίμησης της κρουστικής απόκρισης του καναλιού διέρχεται από το γραμμικό φίλτρο D_i με σημεία $\{\delta_i^{m_0}(0), \delta_i^{m_0}(1), \ldots \delta_i^{m_0}(M_p - 1)\}$ ώστε να μειωθεί ακόμα περισσότερο ο θόρυβος.

5.5 Ανάδραση

Ένα σημαντικό μειονέκτημα της εκτίμησης καναλιού με επεξεργασία σήματος στις δύο διαστάσεις είναι η καθυστέρηση που προκαλεί στο σύστημα. Για την εκτίμηση μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή χρειάζεται πληροφορία του καναλιού πριν και μετά από αυτήν. Αυτό προκαλεί αναπόφευκτα καθυστέρηση ώστε ένας αριθμός πιλοτικών OFDM συμβόλων να έχει ληφθεί. Μια μέθοδος που δεν προκαλεί καθυστέρηση στο σύστημα είναι η χρήση ανάδρασης από τις προηγούμενες χρονικές στιγμές.

Έστω ότι η κατανομή των πιλότων του συστήματος είναι αυτή του σχήματος 5-5 όπου περιοδικά εκπέμπονται πιλοτικά OFDM σύμβολα. Η πιο απλή εφαρμογή της μεθόδου ανάδρασης είναι αυτή στην οποία θεωρείται για την εξίσωση του καναλιού στο σύμβολο m η εκτίμηση του της χρονικής στιγμής $m-1$. Η διαδικασία περιγράφεται από τα εξής βήματα [20] :

1. Το πρώτο OFDM σύμβολο είναι πιλοτικό (έστω την χρονική στιγμή $m-1$), οπότε γίνεται η αρχική LS εκτίμηση του καναλιού $\hat{H}(m-1,k)$, $0 \le k \le N-1$. Για μεγαλύτερη ακρίβεια μπορεί να γίνει μείωση του θορύβου τις εκτίμησης με μία από τις μεθόδους μονοδιάστατης εκτίμησης καναλιού που αναφέρθηκαν παραπάνω.
2. Για το επόμενο OFDM σύμβολο την χρονική στιγμή m (το οποίο μεταφέρει μόνο δεδομένα) η εξίσωση του καναλιού γίνεται χρησιμοποιώντας την εκτίμηση καναλιού της προηγούμενης χρονικής

στιγμής θεωρώντας ότι η μεταβολή του είναι μικρή. Δηλαδή τα σύμβολα που εισέρχονται στον ανιχνευτή μέγιστης πιθανοφάνειας δίνονται από την σχέση

$$\widetilde{X}(m,k)=Y(m,k)/\hat{H}(m-1,k),\ 0\leq k\leq N-1 \tag{5.11}$$

3. Η έξοδος του ανιχνευτή μέγιστης πιθανοφάνειας θα δώσει τις τελικές κβαντισμένες εκτιμήσεις $\hat{X}(m,k)$ των δεδομένων, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση του καναλιού την χρονική στιγμή m,

$$\hat{H}(m,k)=Y(m,k)/\hat{X}(m,k),\ 0\leq k\leq N-1 \tag{5.12}$$

4. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για το επόμενο OFDM σύμβολο από το βήμα 2.

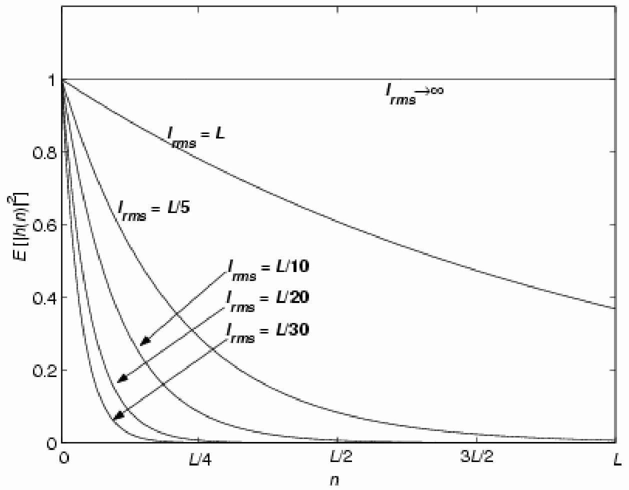
Αν και η παραπάνω διαδικασία είναι σχετικά απλή και δεν προκαλεί καθυστέρηση στο σύστημα, εξαρτάται άμεσα από τον ρυθμό της χρονικής μεταβολής του καναλιού. Εάν το κανάλι μεταβάλλεται αρκετά μεταξύ διαδοχικών OFDM συμβόλων, η παραδοχή που γίνεται στην (5.11) οδηγεί σε λανθασμένη εξίσωση καναλιού. Επιπλέον εάν οι τελικές εκτιμήσεις $\hat{X}(m,k)$ είναι εσφαλμένες, η εκτίμηση του καναλιού της (5.12) δεν θα είναι και αυτή ακριβής (error propagation). Τα δύο αυτά φαινόμενα μπορούν να οδηγήσουν το σύστημα σε μεγάλο ποσοστό σφάλματος. Η μόνη λύση για την αντιμετώπισή του προβλήματος είναι η συχνότερη εκπομπή πιλοτικών συμβόλων αλλά αυτό οδηγεί σε μείωση του ρυθμού εκπομπής δεδομένων του συστήματος. Για αυτό το λόγο η παραπάνω μέθοδος είναι ικανοποιητική μόνο σε περιπτώσεις όπου το κανάλι μεταβάλλεται σχετικά αργά [30].

Εφόσον είναι γνωστή η μεταβολή του καναλιού στο πεδίο του χρόνου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν φίλτρα τα οποία βελτιώνουν την εκτίμηση [23-26] με διαδικασία παρόμοια με αυτήν του σχήματος 5-6. Η διαφορά είναι ότι για την εκτίμηση την χρονική στιγμή m διέρχονται από το φίλτρο μόνο οι εκτιμήσεις των προηγούμενων χρονικών στιγμών $m-M_p, m-M_p+1,\ldots,m-1$, οπότε η εκτίμηση είναι ουσιαστικά διαδικασία γραμμικής πρόβλεψης [5], [25]. Από την εκτίμηση που θα δώσει το φίλτρο γίνεται η εξίσωση καναλιού του m OFDM συμβόλου και από τα αποκωδικοποιημένα σύμβολα γίνεται βελτιωμένη εκτίμηση του καναλιού η οποία θα χρησιμοποιηθεί (μαζί με προηγούμενες εκτιμήσεις) για την εκτίμηση του καναλιού την επόμενη χρονική στιγμή.

6. *Προσομοιώσεις*

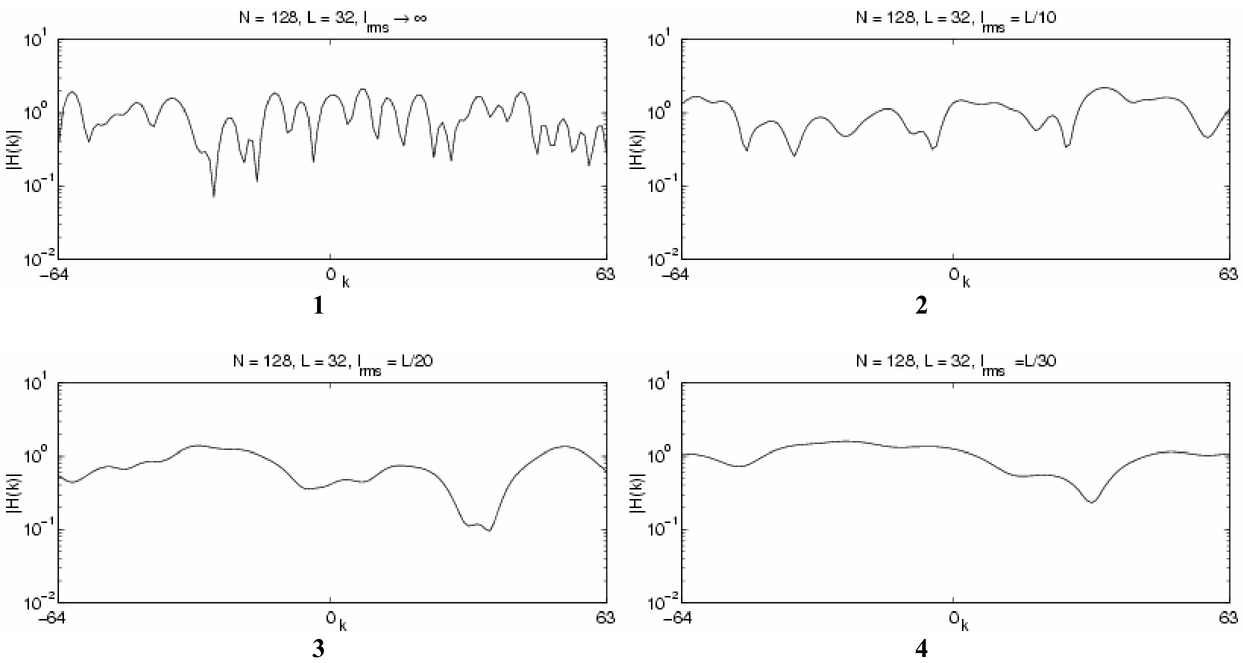
6.1 Παραδοχές

Στις προσομοιώσεις θεωρήθηκε OFDM σύστημα με $N = 128$ υπο-φέρουσες, οι οποίες είναι όλες διαμορφωμένες ($N_u = N$) εκτός αν αναφέρεται το αντίθετο. Η κρουστική απόκριση $\{h(n)\}$ του καναλιού θεωρείται ως γραμμικό FIR φίλτρο $L \le N_{cp}$ σημείων, όπου N_{cp} είναι ο αριθμός των σημείων του κυκλικού προθέματος. Τα σημεία του καναλιού είναι μιγαδικές κανονικές μεταβλητές, ασυσχέτιστες μεταξύ τους και μηδενικής μέσης τιμής (Rayleigh fading). Η κατανομή της ενέργειας στα σημεία της κρουστικής απόκρισης θεωρείται ότι είναι εκθετικής μορφής, δηλαδή $\sigma_n^2 = E\{|h(n)|^2\} = C \cdot \mathbf{exp}\{-n/l_{RMS}\}$, $0 \le n \le L-1$ (σχήμα 6-1) όπου $l_{RMS} = \tau_{RMS}/T_s$, τ_{RMS} : σταθερά, T_s : η περίοδος δειγματοληψίας του συστήματος, και η σταθερά C επιλέγεται έτσι ώστε η συνολική ενέργεια του καναλιού την τυχαία χρονική στιγμή m να είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα ($\sum_{n=0}^{L-1} \sigma_n^2 = 1$).



Σχήμα 6-1 Κατανομή της ισχύος στα σημεία κρουστικής L σημείων για διάφορες τιμές της σταθεράς l_{RMS}

Η διάρκεια L του καναλιού και η κατανομή της ισχύος στα σημεία του, είναι οι δύο παράμετροι που χαρακτηρίζουν το κανάλι. Θεωρώντας σταθερό L η ομοιόμορφη κατανομή της ισχύος στα σημεία της κρουστικής ($l_{RMS} \to \infty$), αντιστοιχεί σε συχνοτική απόκριση πολύ μικρού συνεχούς εύρους ζώνης σε σχέση με την περίπτωση όπου η ισχύς κατανέμεται στα πρώτα σημεία της κρουστικής (π.χ. $l_{RMS} = L/30$). Στο σχήμα 6-2 φαίνονται χαρακτηριστικές συχνοτικές αποκρίσεις που προέκυψαν από κανάλια με κατανομές ισχύος που χαρακτηρίζονται από διάφορες τιμές της παραμέτρου l_{RMS}. Προφανώς η συχνοτική απόκριση που αντιστοιχεί σε κανάλι με $l_{RMS} \to \infty$ έχει και το μικρότερο συνεχές εύρος ζώνης.



Σχήμα 6-2 Συχνοτική απόκριση για διάφορες τιμές της σταθεράς l_{RMS}

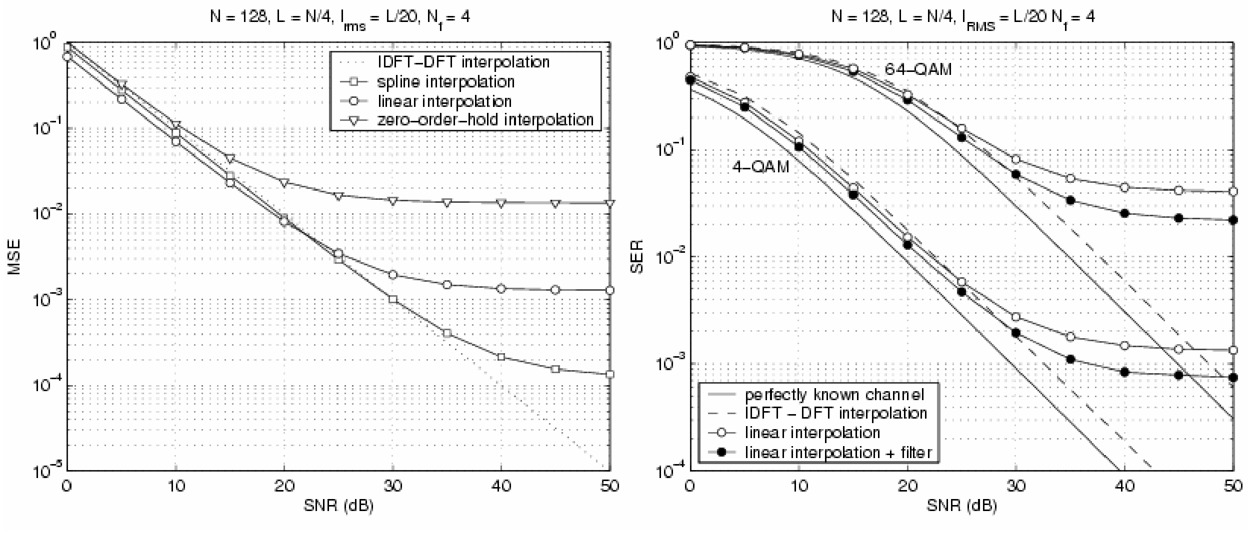
Θεωρείται οτι οι υπο-φέρουσες διαμορφώνονται από QAM σύμβολα, ενώ ως πιλότοι χρησιμοποιούνται BPSK σύμβολα ενέργειας ίσης με την μέση ενέργεια των QAM συμβόλων. Ο θόρυβος του συστήματος που εισέρχεται στο πεδίο του χρόνου είναι μιγαδικός ($w(n) = w_R(n) + jw_I(n)$), με τις μεταβλητές $w_R(n), w_I(n)$ να είναι δείγματα κανονικού λευκού θορύβου μηδενικής μέσης τιμής και ισχύος $N_0/2$, συνεπώς $E\{w(n)\} = 0$ και $\sigma_w^2 = E\{|w(n)|^2\} = N_0$. Ο λόγος σήματος προς θόρυβο ορίζεται ως $SNR = E_s/N_0$, όπου E_s είναι η μέση ενέργεια του σήματος στο πεδίο του χρόνου. Επιπλέον θεωρείται τέλειος συγχρονισμός μεταξύ πομπού και δέκτη εκτός και εάν αναφέρεται το αντίθετο.

Στην συνέχεια θα εξεταστεί η απόδοση των διάφορων μεθόδων εκτίμησης καναλιού που περιγράφηκαν, κυρίως με βάση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης (MSE) και το ποσοστό εσφαλμένης ανίχνευσης συμβόλων (Symbol Error Rate – SER), σε διάφορες συνθήκες καναλιού και θορύβου. Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων προκύπτουν από την εφαρμογή των αλγορίθμων σε ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών υλοποιήσεων καναλιών και θορύβου με τις θεωρούμενες κάθε φορά παραμέτρους.

6.2 Αλγόριθμοι επεξεργασίας σήματος σε μία διάσταση

6.2.1 Πολυωνυμική Παρεμβολή – Παρεμβολή μέσω IDFT-DFT

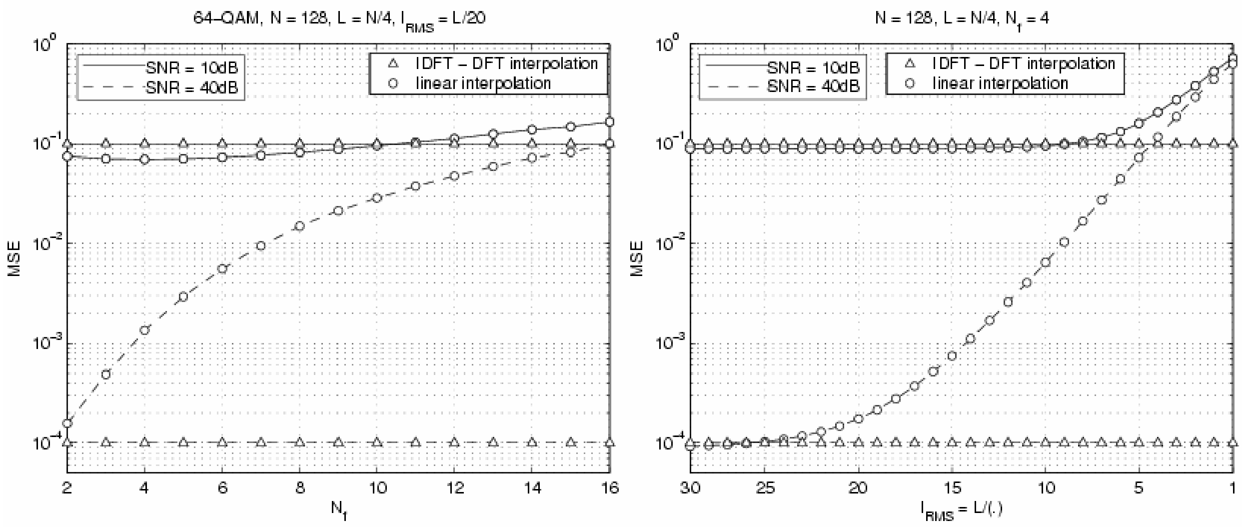
Η πιο απλή κατηγορία αλγορίθμων είναι αυτή της πολυωνυμικής κατανομής. Έχουν χαμηλή πολυπλοκότητα και δεν βασίζονται σε καμία παραδοχή για την μορφή του καναλιού ή την στατιστική του. Στις προσομοιώσεις θεωρήθηκαν οι απλούστερες μέθοδοι πολυωνυμικής παρεμβολής, η παρεμβολή μηδενικής τάξης και η γραμμική παρεμβολή λόγω της απλότητάς τους. Συγκρίσιμης πολυπλοκότητας είναι και η μέθοδος της παρεμβολής μέσω IDFT-DFT η οποία βασίζεται στην παραδοχή της FIR κρουστικής απόκρισης $L < N$ σημείων. Στο σχήμα 6-3-1 παρουσιάζεται η απόδοση της εκτίμησης των τριών αυτών μεθόδων παρεμβολής συναρτήσει του SNR με βάση το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, για απόσταση πιλότων με $N_f = 4$ σε Rayleigh κανάλι με παραμέτρους $L = N/4$ και $l_{RMS} = L/20$ του οποίου η συχνοτική απόκριση είναι σχετικά ομαλή (σχήμα 6-2-3). Είναι εμφανές το κάτω όριο της απόδοσης των μεθόδων πολυωνυμικής παρεμβολής στα μεγάλα SNR, με μεγαλύτερο αυτό της παρεμβολής μηδενικής τάξης όπως είναι αναμενόμενο, σε αντίθεση με την παρεμβολή μέσω IDFT-DFT η οποία δεν παρουσιάζει κάτω όριο. Στο σχήμα 6-3-2 φαίνεται η απόδοση με βάση το SER της γραμμικής παρεμβολής, της παρεμβολής μέσω IDFT-DFT, και της γραμμικής παρεμβολής με μετέπειτα εφαρμογή φίλτρου με στόχο την μείωση του θορύβου της αρχικής εκτίμησης [11]. Για την εκτίμηση μέσω IDFT-DFT η απόδοση είναι κατά 3dB περίπου χειρότερη από την ιδεατή περίπτωση της τέλειας γνώσης του καναλιού (perfectly known channel) για όλες τις τιμές του SNR, η οποία όπως αναφέρθηκε παραπάνω είναι αντίστοιχη της LS εκτίμησης. Η γραμμική παρεμβολή μπορεί να θεωρηθεί ικανοποιητική στο εύρος τιμών του SNR από 0 έως 30dB, χωρίς όμως να επιτυγχάνεται ποσοστό σφάλματος χαμηλότερο του 10^{-3} ακόμα και στην περίπτωση της 4-QAM διαμόρφωσης με χρήση φίλτρου, λόγω της απόκλισης της καμπύλης της πραγματικής συχνοτικής απόκρισης από την γραμμική προσέγγιση της παρεμβολής.



1 **2**

Σχήμα 6-3 Απόδοση των μεθόδων πολυωνυμικής και IDFT-DFT παρεμβολής συναρτήσει του SNR του συστήματος.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η απόδοση της παρεμβολή μέσω IDFT-DFT είναι ανεξάρτητη της κατανομής των πιλότων του OFDM συμβόλου και της παραμέτρου l_{RMS} του συστήματος εφόσον ισχύει $N_p \geq L$. Αυτό φαίνεται και στα σχήματα 6-4-1,2 όπου εμφανίζεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης της γραμμικής και της IDFT-DFT παρεμβολής συναρτήσει της απόστασης των πιλότων N_f και της παραμέτρου l_{RMS}. Από τα δύο διαγράμματα προκύπτει ότι η γραμμική παρεμβολή είναι συγκρίσιμης απόδοσης με την IDFT-DFT παρεμβολή για μικρές τιμές των N_f και l_{RMS} που αντιστοιχούν σε πυκνή κατανομή πιλότων και ομαλή συχνοτική απόκριση σε συνθήκες όπου το SNR είναι μικρό. Είναι χαρακτηριστικό ότι σε αυτό το εύρος τιμών η γραμμική παρεμβολή έχει λίγο καλύτερη απόδοση από την IDFT-DFT παρεμβολή.

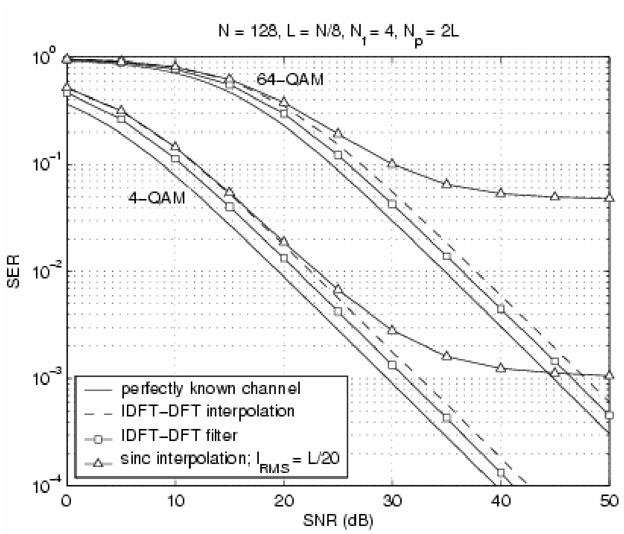


1 2

Σχήμα 6-4 Απόδοση των μεθόδων πολυωνυμικής και IDFT-DFT παρεμβολής συναρτήσει των παραμέτρων N_f και l_{RMS}.

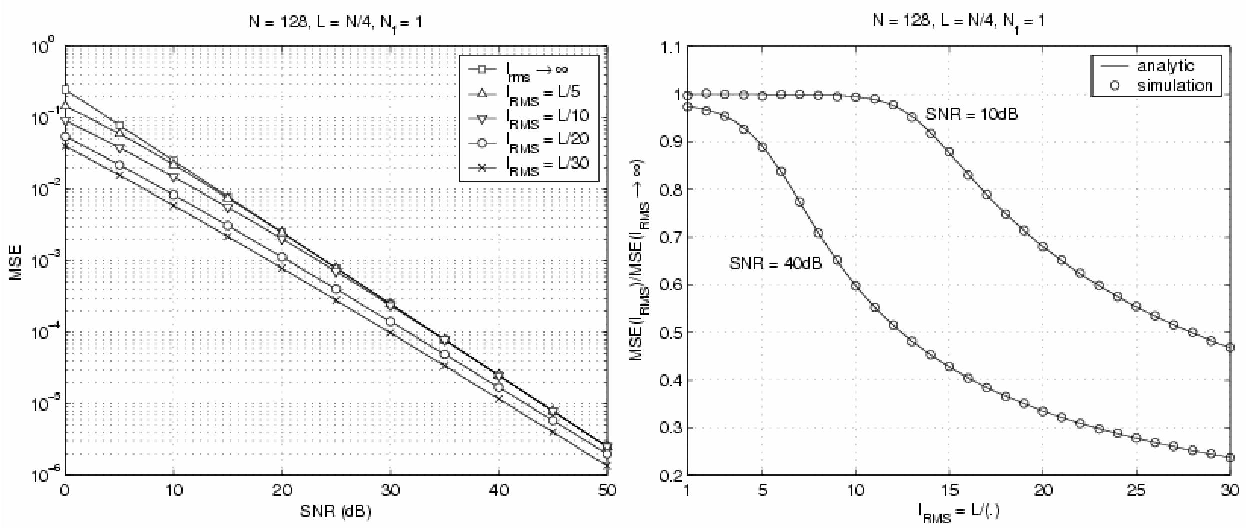
6.2.2 Φίλτρα

Στο σχήμα 6-5 παρουσιάζεται η απόδοση με βάση το SER των δύο φίλτρων των οποίων η εφαρμογή δεν απαιτεί/αξιοποιεί την γνώση της στατιστικής του καναλιού και του θορύβου, δηλαδή του IDFT-DFT φίλτρου και του φίλτρου ιδεατής παρεμβολής (sinc interpolator). Επιπλέον για λόγους σύγκρισης εμφανίζεται και η απόδοση της IDFT-DFT παρεμβολής. Το φίλτρο ιδεατής παρεμβολής είναι εμφανές ότι εμφανίζει κάτω όριο στην απόδοσή του ακόμα και για κανάλι με παράμετρο $l_{RMS} = L/20$ για τους λόγους που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 4.3. Προφανώς η εφαρμογή του σε κανάλι με εντονότερα μεταβαλλόμενη συχνοτικής απόκριση θα είχε ακόμα χειρότερα αποτελέσματα. Σε αντίθεση με το φίλτρο ιδεατής παρεμβολής, το IDFT-DFT φίλτρο δεν παρουσιάζει κάτω όριο όπως συμβαίνει και με την IDFT-DFT παρεμβολή. Για την συγκεκριμένη κατανομή πιλότων το IDFT-DFT φίλτρο έχει καλύτερη απόδοση από την IDFT-DFT παρεμβολή, εφόσον στην διαδικασία εκτίμησης του καναλιού μέσω του φίλτρου γίνεται χρήση της γνώσης του μήκους $L \leq N_{cp}$ του καναλιού (για την περίπτωση του σχήματος έχει θεωρηθεί η ακριβής διάρκεια L του καναλιού). Επειδή είναι $N_p = 2L$, σύμφωνα με την (4.27) το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης του IDFT-DFT φίλτρου είναι το μισό της εκτίμησης της IDFT-DFT παρεμβολής. Με βάση το SER η απόδοση του IDFT-DFT φίλτρου είναι περίπου 1,6dB χειρότερη από την τέλεια γνώση του καναλιού και περίπου 1,4dB καλύτερη από την IDFT-DFT παρεμβολή. Φαίνεται δηλαδή ότι η θεώρηση του μήκους του καναλιού από τον αλγόριθμο εκτίμησης καναλιού είναι πολύ σημαντική στην βελτίωση της εκτίμησης. Σημειώνεται ότι η απόδοση του IDFT-DFT φίλτρου δεν εξαρτάται από την παράμετρο l_{RMS} του καναλιού.



Σχήμα 6-5 Απόδοση του IDFT-DFT φίλτρου, του φίλτρου ιδεατής παρεμβολής και της IDFT-DFT παρεμβολής συναρτήσει του SNR.

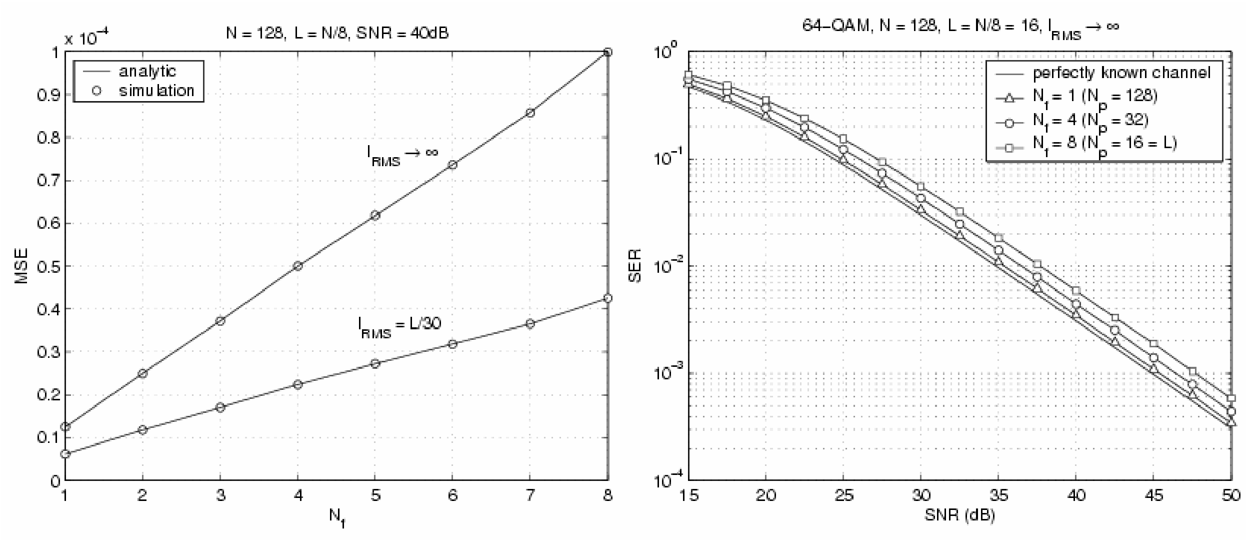
Το βέλτιστο γραμμικό φίλτρο το οποίο κάνει χρήση της γνώσης της στατιστικής καναλιού και θορύβου είναι το Wiener φίλτρο. Στο σχήμα 6-6-1 φαίνεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης του Wiener φίλτρου για κανάλια με διαφορετικές παραμέτρους l_{RMS} συναρτήσει του θορύβου. Οι καμπύλες προέκυψαν χρησιμοποιώντας την αναλυτική σχέση της (4.42) θεωρώντας σε όλες τις περιπτώσεις τέλεια γνώση των l_{RMS} και SNR. Φαίνεται ότι η χειρότερη απόδοση προκύπτει όταν $l_{RMS} \to \infty$ η οποία συμπίπτει με την απόδοση του απλού IDFT-DFT φίλτρου, εφόσον και τα δύο φίλτρα έχουν "τετραγωνισμένο εύρος ζώνης" σε αυτήν την περίπτωση (σχήμα 4-8). Για μικρότερες τιμές της παραμέτρου l_{RMS} το Wiener φίλτρο αποκόπτει μεγαλύτερο μέρος του θορύβου και η απόδοση είναι καλύτερη ιδιαιτέρως στα μικρά SNR. Η τελευταία διαπίστωση φαίνεται παραστατικότερα στο σχήμα 6-6-2 όπου παρουσιάζεται ο λόγος του μέσου τετραγωνικού σφάλματος Wiener φίλτρου προσαρμοσμένου στην πραγματική τιμή των l_{RMS} και SNR προς το μέσο τετραγωνικό σφάλμα του IDFT-DFT φίλτρου. Είναι εμφανές ότι στα μικρά SNR το Wiener φίλτρο δίνει αισθητά καλύτερη εκτίμηση για $l_{RMS} < L/5$, ενώ στα μεγάλα SNR η βελτίωση γίνεται εμφανής για $l_{RMS} < L/15$. Οι καμπύλες του σχήματος 6-6-2 έχουν επιβεβαιωθεί και με προσομοίωση.



1 2

Σχήμα 6-6 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης Wiener φίλτρου τέλεια προσαρμοσμένου στις τιμές των l_{RMS} και SNR

Το σχήμα 6-6 έχει προκύψει για κατανομή πιλότων με $N_f = 1$. Παρόμοια συμπεριφορά έχει και η εκτίμηση για $N_f > 1$. Σε αυτή την περίπτωση αναμένεται μείωση της ακρίβειας της εκτίμησης με την αύξηση της απόστασης των πιλότων (ισοδύναμα με την μείωση των πιλοτικών συχνοτήτων), εφόσον ο αλγόριθμος έχει μικρότερη πληροφορία για το κανάλι. Στο σχήμα 6-7-1 φαίνεται η μείωση της απόδοσης της εκτίμησης Wiener φίλτρου προσαρμοσμένου στην στατιστική καναλιού και θορύβου συναρτήσει του N_f. Είναι χαρακτηριστικό ότι η απόδοση μειώνεται γραμμικά με την αύξηση του N_f αλλά με κλίση που εξαρτάται από την παράμετρο l_{RMS} του καναλιού. Φαίνεται ότι για κανάλι με ομαλή συχνοτική απόκριση η μείωση της απόδοσης είναι μικρότερη για τον ίδιο αριθμό πιλότων σε σχέση με την περίπτωση καναλιού με μικρό συνεχές εύρος ζώνης. Αυτό είναι αναμενόμενο εφόσον στην πρώτη περίπτωση λόγω του μεγάλου συνεχούς εύρους ζώνης η θεώρηση μεγάλου αριθμού πιλότων δεν δίνει σημαντικά περισσότερη πληροφορία αφού αρκετοί από αυτούς έχουν υποστεί την ίδια παραμόρφωση από το κανάλι. Στο σχήμα 6-7-2 φαίνεται η απόδοση του Wiener φίλτρου με βάση SER για διάφορες τιμές του αριθμού N_p των πιλότων, για την περίπτωση καναλιού με $l_{RMS} \to \infty$, οπότε η απόδοση είναι πρακτικά η ίδια με αυτή που έχει αυτή του απλού IDFT-DFT φίλτρου. Για ποσοστό σφάλματος $SER = 10^{-3}$, η απόδοση σε σχέση με το ιδεατό σύστημα είναι χειρότερη κατά 0,35, 1,8, και 2,8 dB περίπου για $N_f = 1$, $N_f = 4$, $N_f = 8$ αντίστοιχα.

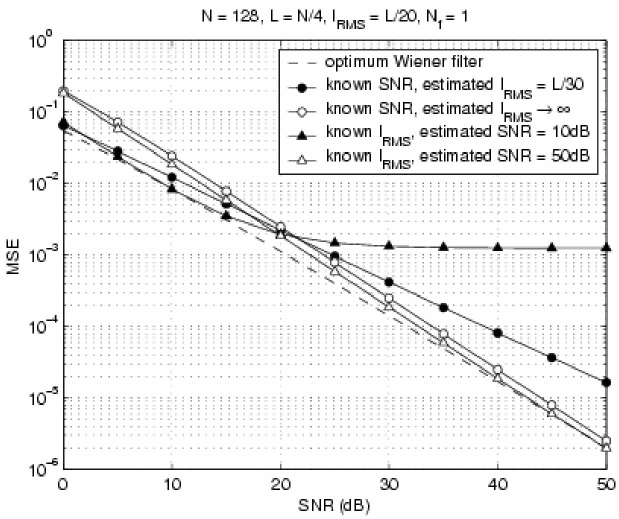


1 2

Σχήμα 6-7 Μεταβολή της απόδοσης της εκτίμησης για διάφορες τιμές του αριθμού των πιλότων N_p

6.2.3 Προσαρμογή του Wiener φίλτρου σε στατιστική διαφορετική από την πραγματική

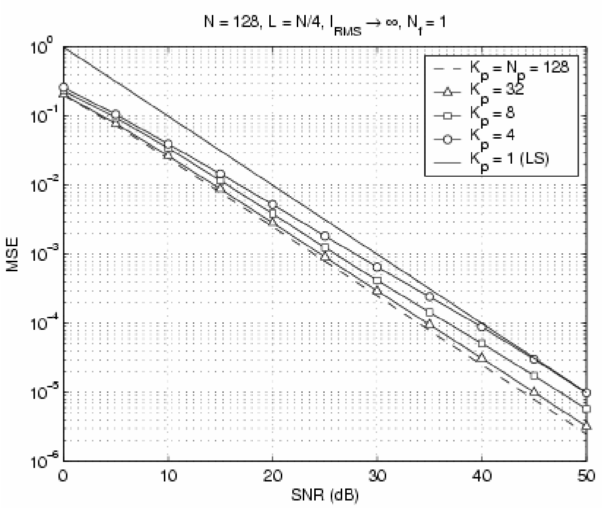
Στο σχήμα 6-8 φαίνεται η ακρίβεια της εκτίμησης του Wiener φίλτρου για την περίπτωση που είναι προσαρμοσμένο σε τιμές των l_{RMS} και SNR διαφορετικές από τις πραγματικές. Έχει θεωρηθεί η περίπτωση καναλιού με $L = N/4$, $l_{RMS} = L/20$ και κατανομή πιλότων με $N_f = 1$. Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η προσαρμογή του φίλτρου σε SNR μικρότερο από το μεγαλύτερο στο οποίο πρόκειται να λειτουργήσει το σύστημα οδηγεί σε κάτω όριο την ακρίβεια της εκτίμησης. Το ίδιο συμβαίνει και εάν το φίλτρο προσαρμοστεί σε ομαλότερη συχνοτική απόκριση από την πραγματική. Επομένως η προσαρμογή του φίλτρου στο μεγαλύτερο SNR που πρόκειται να λειτουργήσει το σύστημα και στο χειρότερο κανάλι από πλευράς μεταβολής της συχνοτικής απόκρισης είναι απαραίτητη για να μπορεί το φίλτρο να δώσει εκτίμηση σε όλες τις συνθήκες που πρόκειται να αντιμετωπίσει το σύστημα, με κόστος μείωση της απόδοσης από την ιδεατή περίπτωση της απόλυτης προσαρμογής.



Σχήμα 6-8 Προσαρμογή του Wiener φίλτρου σε διαφορετικές τιμές των l_{RMS} και SNR από τις πραγματικές

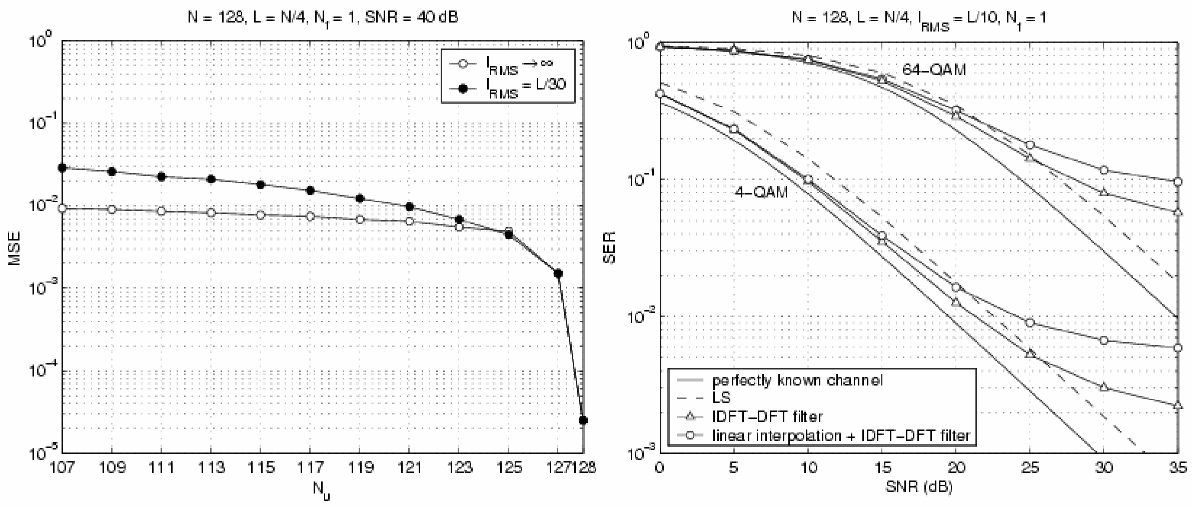
6.2.4 Μείωση της πολυπλοκότητας του Wiener φίλτρου

Στην συνέχεια θα εξεταστούν οι τροποποιήσεις του Wiener φίλτρου και οι διαφορετικές υλοποιήσεις του που οδηγούν σε μείωση της πολυπλοκότητας της εκτίμησης. Η πιο απλή μέθοδος μείωσης της πολυπλοκότητας είναι η μείωση της τάξης του φίλτρου θεωρώντας για κάθε εκτίμηση σε μία υπο-φέρουσα k, έναν αριθμό πιλότων $K_p < N_p$. Θα θεωρηθεί η περίπτωση που το κανάλι έχει κρουστική απόκριση ομοιόμορφης κατανομής ισχύος ($l_{RMS} \to \infty$) ως άνω όριο της απόδοσης του φίλτρου (αντίστοιχης του IDFT-DFT φίλτρου) και $N_f = 1$. Στο σχήμα 6-9 φαίνεται η απόδοση της εκτίμησης για διάφορες τιμές του K_p με το φίλτρο απόλυτα προσαρμοσμένο στην στατιστική καναλιού θορύβου. Για κάθε υπο-φέρουσα k επιλέγονται οι K_p πιλοτικές υπο-φέρουσες με την μεγαλύτερη με αυτήν συσχέτιση. Όπως είναι αναμενόμενο όσο μεγαλύτερος αριθμός πιλότων χρησιμοποιείται στην εκτίμηση τόσο καλύτερο είναι και το αποτέλεσμα. Είναι χαρακτηριστικό ότι ακόμα και με χρήση $K_p = 8 = N_p/16$ πιλότων η εκτίμηση είναι αρκετά καλύτερη από την LS εκτίμηση, που σημαίνει ότι η απόρριψη των πιλοτικών συχνοτήτων με μικρή συσχέτιση λόγω του μικρού συνεχούς εύρους ζώνης του καναλιού δεν επηρεάζει πολύ την ακρίβεια της εκτίμησης.



Σχήμα 6-9 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα της MMSE εκτίμησης με χρήση $K_p < N_p$ πιλοτικών συχνοτήτων για κάθε εκτίμηση

Η πιο αποδοτική υλοποίηση της MMSE εκτίμησης όσον αφορά την πολυπλοκότητα είναι η MMSE παρεμβολή μέσω των μετασχηματισμών IFFT-FFT (σχήμα 4-11). Από την ανάλυση της μεθόδου προέκυψε ότι η απόδοσή της είναι ίδια με αυτή του Wiener φίλτρου με την προϋπόθεση ότι και οι N υπο-φέρουσες του συστήματος είναι διαμορφωμένες ($N_u = N$). Στο σχήμα 6-10 εξετάζεται η ικανότητα εφαρμογής του αλγορίθμου στην περίπτωση όπου υπάρχουν αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες. Οι αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες δεν φέρουν καμία πληροφορία για την συχνοτική απόκριση σε αυτές τις συχνότητες με αποτέλεσμα το διάνυσμα $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$ στον οποίο θα εφαρμοστεί αρχικά ο IDFT να είναι της μορφής $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p} = \left[\hat{H}_{LS}(k_{p_1}), \hat{H}_{LS}(k_{p_2}), \ldots, \hat{H}_{LS}(k_{p_{N_p}}), 0, \ldots, 0\right]^T$, όπου έχει γίνει η θεώρηση ότι οι αδιαμόρφωτες υποφέρουσες είναι οι τελευταίες $N - N_u$ υπο-φέρουσες του συστήματος. Τα τελευταία μηδενικά του διανύσματος αντιστοιχούν στις υπο-φέρουσες εκείνες όπου για $N_u = N$ θα ήταν πιλοτικές, οπότε η εφαρμογή του IDFT θα έδινε την πραγματική κρουστική απόκριση μαζί με θόρυβο (σχέση (4.59)). Λόγω της παρουσίας μηδενικών θα προκύψει μία παραμορφωμένη εκδοχή της λόγω έλλειψης πληροφορίας σε αυτά τα σημεία. Συγκεκριμένα στο σχήμα 6-10-1 φαίνεται η μείωση της απόδοσης της εκτίμησης μέσω IDFT-DFT συναρτήσει του αριθμού των διαμορφωμένων υπο-φέρουσων N_u, για τις περιπτώσεις καναλιού ομαλής και έντονα μεταβαλλόμενης συχνοτικής απόκρισης ($l_{RMS} = L/30$ και $l_{RMS} \to \infty$ αντίστοιχα) για SNR = 40dB. Είναι χαρακτηριστικό ότι ακόμα και με μία αδιαμόρφωτη υπο-φέρουσα το μέσο τετραγωνικού σφάλματος αυξάνεται κατά δύο τάξεις μεγέθους σε σχέση με την περίπτωση όπου $N_u = N$. Στο σχήμα 6-10-2 φαίνεται η απόδοση της εκτίμησης για $N_u = 117$ με βάση το SER, για κανάλι με παράμετρο $l_{RMS} = L/10$, όπου έχουν θεωρηθεί δύο διαδικασίες. Η πρώτη είναι αυτή που μόλις περιγράφηκε ενώ στην άλλη γίνεται πρώτα εκτίμηση των μηδενικών σημείων του διανύσματος $\hat{\mathbf{H}}_{LS,p}$ μέσω γραμμικής παρεμβολής. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι αν και η γραμμική παρεμβολή ελαττώνει το κάτω όριο της εκτίμησης, η απόδοση του συστήματος δεν φτάνει στο όριο του $SER = 10^{-3}$ ακόμα και με χρήση 4-QAM διαμόρφωσης.



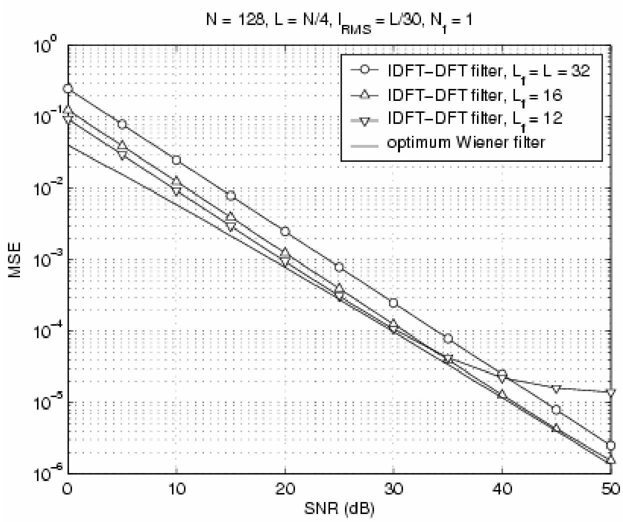
1 2

Σχήμα 6-10 Εφαρμογή της παρεμβολής μέσω IDFT-DFT σε OFDM σύστημα με αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες.

Μείωση της πολυπλοκότητας του Wiener φίλτρου επιτυγχάνεται και με την χρήση του MAP αλγορίθμου εκτίμησης καναλιού της (4.75). Από προσομοιώσεις προκύπτει ότι η απόδοση του MAP αλγορίθμου είναι ακριβώς ίδια με το Wiener φίλτρο εφόσον η κρουστική απόκριση των καναλιών είναι της μορφής της (4.74). Η διαφορά μεταξύ της εκτίμησης της (4.75) με αυτή της (4.41) είναι ότι η τελευταία είναι γενικότερη για οποιαδήποτε στατιστική καναλιού, ενώ η πρώτη έχει εξαχθεί με την συγκεκριμένη θεώρηση καναλιού της (4.74). Στην περίπτωση όπου οι δύο αλγόριθμοι εφαρμόζονται σε κανάλια αυτής της μορφής προκύπτει η ίδια εκτίμηση. Πλεονέκτημα του MAP αλγορίθμου είναι η χαμηλότερη πολυπλοκότητά του σε σχέση με το Wiener φίλτρο και η δυνατότητα εφαρμογής του σε συστήματα με αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες. Επιπλέον και ο αλγόριθμος MMSE εκτίμησης με χρήση SVD της (4.47) δίνει τα ίδια αποτελέσματα με το Wiener φίλτρο εφόσον οι ιδιοτιμές που παραλείπονται είναι αμελητέες. Στην περίπτωση όπου το κανάλι περιγράφεται από διακριτή FIR κρουστική απόκριση L σημείων, η θεώρηση των L μεγαλύτερων ιδιοτιμών περιέχει όλη την πληροφορία της στατιστικής του καναλιού εφόσον οι υπόλοιπες είναι εξ ορισμού μηδενικές, συνεπώς και η απόδοση της εκτίμησης είναι ακριβώς ίδια με αυτή του Wiener φίλτρου.

6.2.5 Σύγκριση μεταξύ IDFT-DFT φίλτρου και Wiener φίλτρου

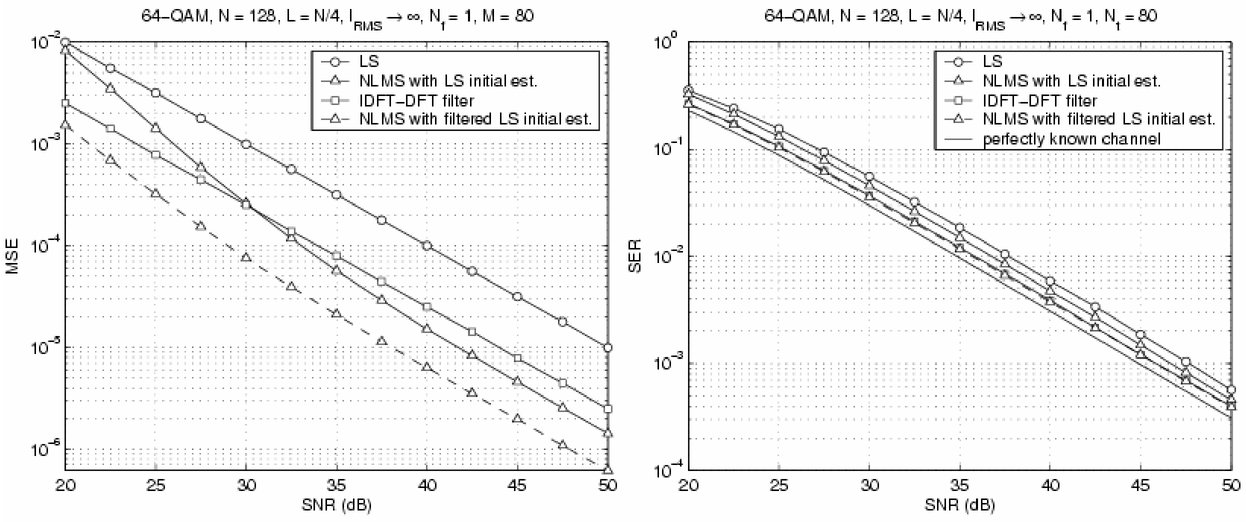
Από το σχήμα 6-5-1 προκύπτει οτι η MMSE εκτίμηση μπορεί να δώσει για κανάλια που χαρακτηρίζονται από την παράμετρο $l_{RMS} = L/30$, από 3dB καλύτερη εκτίμηση στα μεγάλα SNR έως και 6 στα μικρότερα σε σχέση με την εκτίμηση του IDFT-DFT φίλτρου. Από το σχήμα 6-1 φαίνεται ότι κανάλια με εκθετική κατανομή ισχύος που χαρακτηρίζεται από την τιμή $l_{RMS} = L/30$ έχουν αριθμό μη αμελητέων σημείων αρκετά μικρότερο του L, που σημαίνει ότι εάν για την εκτίμηση μέσω IDFT-DFT φίλτρου θεωρηθούν ως μήκος της κρουστικής $L_f \le L$ σημεία, θα αποκοπεί περισσότερος θόρυβος και η εκτίμηση θα είναι καλύτερη. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 6-11, όπου για κανάλι με παράμετρο $l_{RMS} = L/30$ εξετάζεται η ακρίβεια της εκτίμησης του IDFT-DFT φίλτρου για το οποίο γίνεται η θεώρηση ότι το μήκος της κρουστικής είναι L_f σημεία. Επιπλέον παρουσιάζεται και η βέλτιστη εκτίμηση που δίνει το Wiener φίλτρο προσαρμοσμένο στις τιμές των l_{RMS} και SNR. Είναι εμφανής η βελτίωση της απόδοσης του φίλτρου για τιμή L_f αρκετά μικρότερης αυτής του L. Συγκεκριμένα για $L_f = L/2$ η απόδοση του φίλτρου τείνει στην απόδοση της MMSE εκτίμησης στα μεγάλα SNR. Για μικρότερο L_f το φίλτρο αποκόπτει μη αμελητέα σημεία της κρουστικής με αποτέλεσμα να χάνεται πληροφορία αν και στα μικρότερα SNR πλησιάζει ακόμα περισσότερο την απόδοση του Wiener φίλτρου. Συγκρίνοντας τις καμπύλες τις MMSE εκτίμησης και του IDFT-DFT φίλτρου με $L_f = L/2$ προκύπτει ότι η καλύτερη απόδοση του Wiener φίλτρου οφείλεται στην γνώση της ισχύος του θορύβου, το οποίο υποδεικνύεται και από την σχέση (4.75).



Σχήμα 6-11 Σύγκριση IDFT-DFT φίλτρου με Wiener φίλτρο

6.2.6 Χρονικά αμετάβλητο κανάλι

Στις περισσότερες εφαρμογές του OFDM το κανάλι είναι τόσο αργά μεταβαλλόμενο ώστε να θεωρείται με μεγάλη ακρίβεια ως χρονικά αμετάβλητο για ένα μεγάλο αριθμό OFDM συμβόλων. Σε αυτή την περίπτωση η εκτίμηση του καναλιού με χρήση ενός και μόνο πιλοτικού OFDM συμβόλου είναι ικανοποιητική για την εξίσωση και των επόμενων OFDM συμβόλων. Μία μέθοδος εκτίμησης/εξίσωσης καναλιού που χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις είναι ο αλγόριθμος LMS [1]. Ο αλγόριθμος ξεκινώντας από μία αρχική εκτίμηση για την συχνοτική απόκριση (ή και από μία τυχαία τιμή εάν δεν γίνεται χρήση πιλότων), με επεξεργασία των επόμενων ανιχνευμένων συμβόλων σταδιακά κάνει ανανέωσή της, η οποία συγκλίνει στην MMSE εκτίμηση του καναλιού. Στο σχήμα 6-12 εξετάζεται ένα OFDM σύστημα στο οποίο η εκτίμηση του καναλιού γίνεται με βάση πιλοτικά OFDM σύμβολα με $N_p = N$ τα οποία εκπέμπονται περιοδικά. Θεωρείται ότι το κανάλι είναι χρονικά αμετάβλητο για 80 διαδοχικά σύμβολα. Με δεδομένη την αρχική LS εκτίμηση του καναλιού, εξετάζονται οι παρακάτω διαδικασίες εκτίμησης καναλιού. Η πρώτη είναι η χρήση φίλτρου με στόχο την μείωση του θορύβου των LS εκτιμήσεων (IDFT-DFT filter) και η δεύτερη η ανανέωση της LS εκτίμησης ανά OFDM σύμβολο μέσω του LMS αλγόριθμου (LMS with LS initial est.). Επιπλέον εξετάζεται η εφαρμογή του LMS αλγόριθμου με αρχική τιμή την εκτίμηση που δίνει το φίλτρο (LMS with filtered LS initial est.). Για το φίλτρο θεωρείται ότι $L_f = L$ (η διάρκεια του καναλιού είναι γνωστή στον δέκτη) ενώ εφαρμόσθηκε ο κανονικοποιημένος αλγόριθμος LMS (NLMS) [1], με την παράμετρο βήματος μ να έχει την τιμή που δίνει την βέλτιστη εκτίμηση (προκύπτει πειραματικά). Στο σχήμα 6-12-1 εμφανίζεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης των διαφόρων μεθόδων. Κατά την εφαρμογή του NLMS η εκτίμηση συνεχώς μεταβάλλεται και θεωρητικά έχει την μεγαλύτερη ακρίβεια στο τελευταίο OFDM σύμβολο. Στο σχήμα παρουσιάζεται η ακρίβεια της τελικής εκτίμησης του NLMS. Φαίνεται ότι η τελική εκτίμηση του NLMS είναι καλύτερη από αυτή του φίλτρου ακόμα και με χρήση των αρχικών LS εκτιμήσεων, ενώ είναι ακόμα καλύτερη με χρήση ως αρχικής τιμής την εκτίμηση του IDFT-DFT φίλτρου. Πιο παραστατική πληροφορία για την απόδοση των αλγόριθμων φαίνεται στο σχήμα 6-12-2 στο οποίο παρουσιάζεται η απόδοση με βάση το ποσοστό σφάλματος ανίχνευσης συμβόλου. Εδώ φαίνεται ότι η απόδοση της εκτίμησης με IDFT-DFT φίλτρο είναι καλύτερη της μεθόδου NLMS με αρχική τιμή την LS εκτίμηση κατά 1dB περίπου, και ελάχιστα χειρότερη από την μέθοδο NLMS με αρχική τιμή την εκτίμηση του φίλτρου. Αυτό φανερώνει ότι η εκτίμηση του φίλτρου είναι πολύ κοντά στην MMSE εκτίμηση και επιπλέον ότι η εκτίμηση του NLMS είναι αρκετά χειρότερη στα πρώτα OFDM σύμβολα σε σχέση με την εκτίμηση του τελευταίου συμβόλου του σχήματος 6-12-1. Συνεπώς η χρήση απλού φίλτρου δίνει ικανοποιητική εκτίμηση καναλιού, χωρίς να απαιτείται περαιτέρω επεξεργασία της.

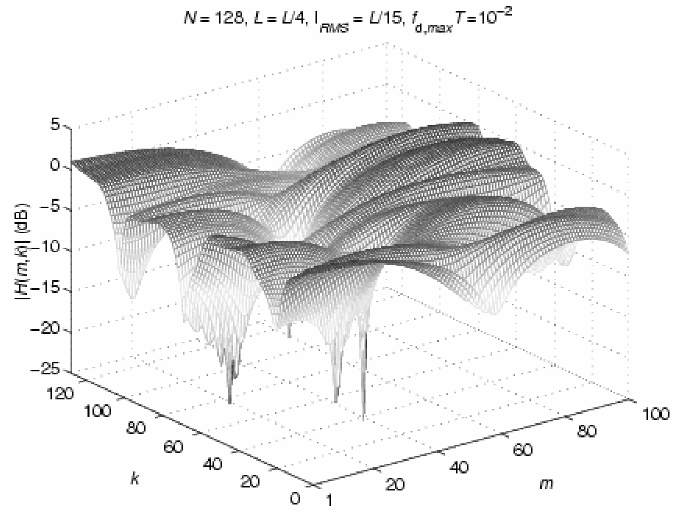


1 2

Σχήμα 6-12 Σύγκριση της εκτίμησης καναλιού μεταξύ του IDFT-DFT φίλτρου και του αλγόριθμου NLMS για χρονικά αμετάβλητο κανάλι.

6.3 Αλγόριθμοι επεξεργασίας σήματος στις δύο διαστάσεις

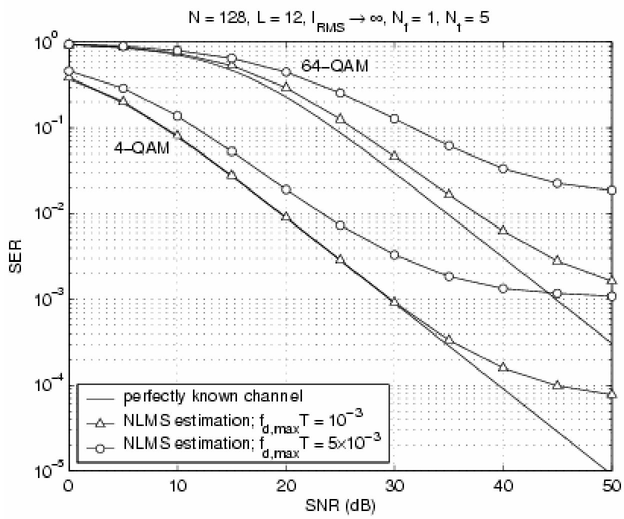
Οι αλγόριθμοι με επεξεργασία σήματος σε δύο διαστάσεις θα εξεταστούν για την περίπτωση μεταβαλλόμενου καναλιού αφού μόνο τότε έχει νόημα η χρήση τους. Ως μέτρο της μεταβολής του καναλιού θα θεωρηθεί η μέγιστη συχνότητα Doppler κανονικοποιημένη ως προς την απόσταση των διαδοχικών υπο-φέρουσων του OFDM συστήματος, δηλαδή το μέγεθος $f_{d,\max}/\Delta f = f_{d,\max}T$. Ο τρόπος μεταβολής του καναλιού περιγράφεται από την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης στο χρόνο της (2.26). Επιπλέον θα θεωρηθεί ότι το κανάλι παραμένει σταθερό τουλάχιστον κατά την διάρκεια ενός OFDM συμβόλου συμπεριλαμβανομένης και της διάρκειας του κυκλικού προθέματος. Ένα παράδειγμα μεταβαλλόμενης συχνοτικής απόκρισης φαίνεται στο σχήμα 6-13.



Σχήμα 6-13 Μεταβαλλόμενη συχνοτική απόκριση

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.3 για να θεωρηθεί οτι το κανάλι είναι σταθερό κατά την διάρκεια ενός OFDM συμβόλου θα πρέπει η μέγιστη συχνότητα Doppler να είναι περιορισμένη σε ένα πεδίο τιμών στο οποίο η ισχύς του ICI να είναι αμελητέα σε σχέση με τον θόρυβο του συστήματος. Στη συνέχεια, προκειμένου να εξεταστεί η αποτελεσματικότητα των αλγορίθμων σε έντονα μεταβαλλόμενες συνθήκες λειτουργίας, θα θεωρηθούν σε ορισμένες περιπτώσεις κανάλια τα οποία είναι σταθερά κατά την διάρκεια ενός OFDM συμβόλου αλλά η μεταβολή τους αντιστοιχεί σε συχνότητες Doppler για τις οποίες αυτή η παραδοχή δεν είναι σωστή.

Στο σχήμα 6-14 φαίνεται η απόδοση της εφαρμογής του αλγορίθμου NLMS για διάφορες τιμές του $f_{d,\max}T$ που θα εξεταστούν στην συνέχεια, με ανανέωση της εκτίμησης κάθε $N_t = 5$ σύμβολα. Για κάθε καμπύλη έχει χρησιμοποιηθεί η τιμή της παραμέτρου βήματος που έχει την καλύτερη απόδοση. Είναι εμφανής η αδυναμία του αλγορίθμου να ακολουθήσει την μεταβολή του καναλιού με εξαίρεση την περίπτωση όπου $f_{d,\max}T = 10^{-3}$ και 4-QAM διαμόρφωση.

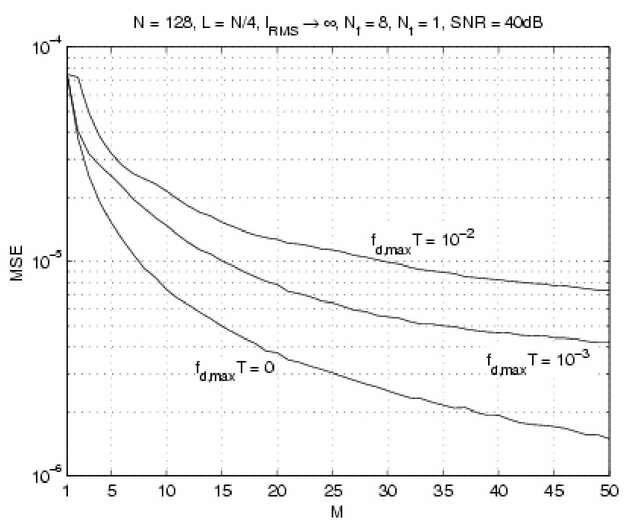


Σχήμα 6-14 Εφαρμογή του αλγόριθμου NLMS σε χρονικά μεταβαλλόμενα κανάλια.

6.3.1 Βελτίωση της εκτίμησης με γνώση της χρονικής μεταβολής του καναλιού

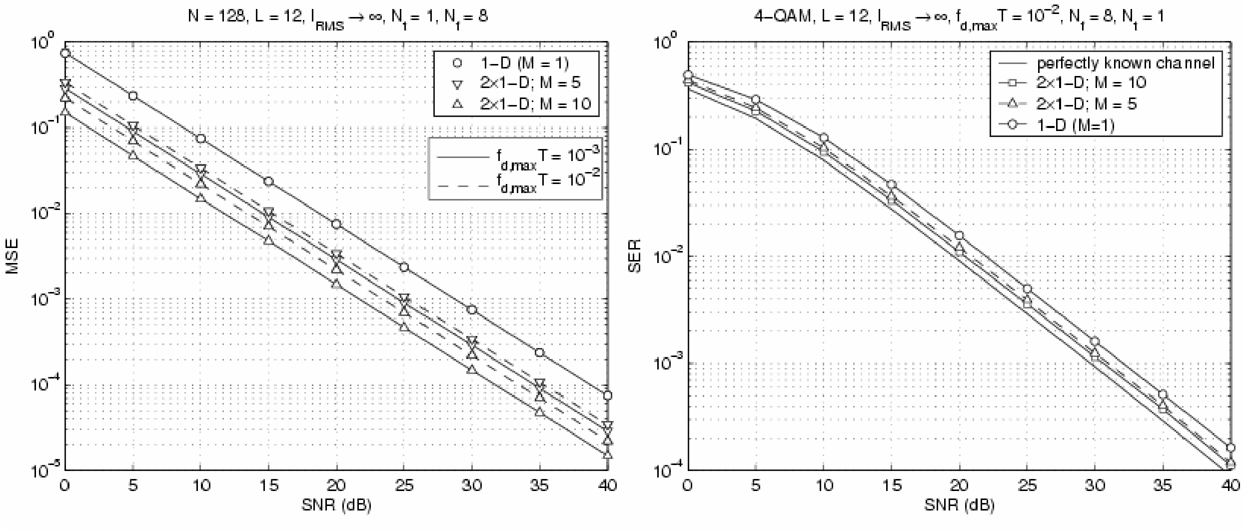
Στο σχήμα 6-15 φαίνεται η απόδοση της εκτίμησης με επεξεργασία σήματος σε δύο διαστάσεις συναρτήσει του αριθμού M των OFDM συμβόλων που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση. Η εκτίμηση γίνεται με την εφαρμογή δύο ανεξάρτητων φίλτρων ($2\times1-\mathrm{D}$), ένα στην διάσταση της συχνότητας και ένα στην διάσταση του χρόνου απόλυτα προσαρμοσμένα στην στατιστική καναλιού και θορύβου (είναι δηλαδή γνωστές οι τιμές των L, $l_{RMS}, f_{d,\max}$, SNR), ενώ η κατανομή των πιλότων του συστήματος είναι αυτή του σχήματος 3-3-2 με $N_f = 8$ και $N_t = 1$. Προφανώς με αυτή την κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί αλγόριθμος εκτίμησης καναλιού στην μία διάσταση, αλλά αναμένεται να έχει μικρότερη ακρίβεια κάτι το οποίο επιβεβαιώνεται και από τις προσομοιώσεις.

Η περίπτωση $f_{d,\max}T = 0$ αντιστοιχεί στην περίπτωση χρονικά αμετάβλητου καναλιού, οπότε η εφαρμογή του φίλτρου στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με διαδικασία εύρεσης του μέσου όρου των M εκτιμήσεων της συχνοτικής απόκρισης. Στις περιπτώσεις όπου η συχνότητα Doppler δεν είναι μηδενική η καμπύλη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος έχει την ίδια μορφή αλλά μετατοπισμένη προς μεγαλύτερες τιμές του M . Συγκεκριμένα για βελτίωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος σε σχέση με την περίπτωση $M = 1$ κατά μία τάξη μεγέθους χρειάζονται $M = 10,\ 20,\ 40$ περίπου OFDM σύμβολα για κανάλια με συχνότητα Doppler $f_{d,\max}T = 0,\ 10^{-3},\ 10^{-2}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 6-15 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα δισδιάστατης εκτίμησης συναρτήσει του αριθμού των θεωρούμενων OFDM συμβόλων

Στο σχήμα 6-16-1 φαίνεται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης για τιμές του $M = 5$ και 10, συναρτήσει της ισχύς του θορύβου του συστήματος. Και εδώ έχει θεωρηθεί εκτίμηση με χρήση δύο ανεξάρτητων φίλτρων, τα οποία είναι προσαρμοσμένα στο χαμηλότερο SNR λειτουργίας του συστήματος, ενώ το φίλτρο στο πεδίο του χρόνου είναι απόλυτα προσαρμοσμένο στην χρονική μεταβολή του καναλιού. Σε όλες τις περιπτώσεις το σφάλμα της εκτίμησης ελαττώνεται γραμμικά με την μείωση του θορύβου, ενώ όπως αναφέρθηκε παραπάνω για κανάλια με μεγαλύτερη συχνότητα Doppler απαιτείται μεγαλύτερο M για ίδια ακρίβεια εκτίμησης. Επιπλέον παρουσιάζεται και το σφάλμα της εκτίμησης που δίνει η εφαρμογή αλγορίθμου εκτίμησης καναλιού σε μία διάσταση (1-D) του οποίου η απόδοση είναι ανεξάρτητη της μεταβολής του καναλιού. Φαίνεται ότι για $M = 5$ η εκτίμηση στις δύο διαστάσεις έχει τουλάχιστον 3,5dB καλύτερη απόδοση ως προς το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης σε σχέση με την εκτίμηση σε μία διάσταση ($M = 1$).



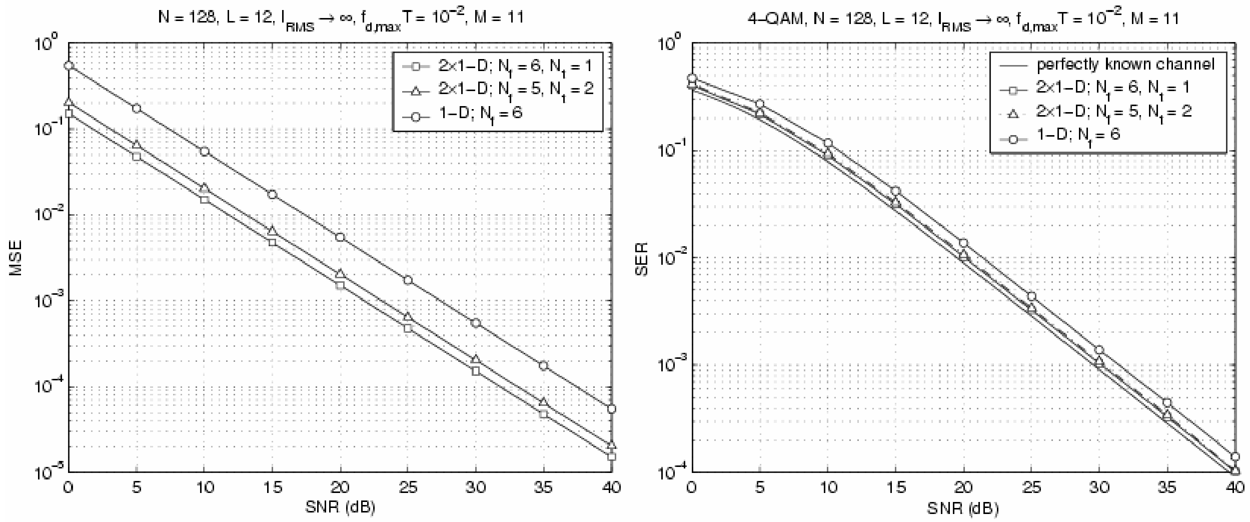
1 2

Σχήμα 6-16 Μεταβολή της ακρίβειας της δισδιάστατης εκτίμησης για διάφορες τιμές του M συναρτήσει του SNR του συστήματος.

Στο σχήμα 6-16-2 φαίνεται η απόδοση των αλγορίθμων με βάση το SER για 4-QAM διαμόρφωση, όπου και πάλι η υπεροχή της δισδιάστατης εκτίμησης είναι εμφανής. Για $f_{d,\max}T = 10^{-2}$ η θεώρηση $M = 1,\ 5,\ 10$ OFDM συμβόλων είναι χειρότερη κατά 2,8, 1,3, 0,8dB αντίστοιχα σε σχέση με την ιδεατή περίπτωση όπου το κανάλι είναι γνωστό.

6.3.2 Πολυπλοκότητα και κατανομή πιλότων

Στην προηγούμενη παράγραφο έγινε σύγκριση της εκτίμησης επεξεργασίας σήματος στις δύο διαστάσεις με την εκτίμηση επεξεργασίας σήματος στην μία διάσταση για την ίδια κατανομή πιλότων, όπου φάνηκε ότι η δισδιάστατη εκτίμηση δίνει αρκετά καλύτερα αποτελέσματα, με κόστος όμως την μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, εξαιτίας της χρήσης πληροφορίας από μεγαλύτερο αριθμό πιλότων. Ένας τρόπος μείωσης της πολυπλοκότητας είναι η αποδοτικότερη κατανομή πιλότων στο δισδιάστατο πλέγμα συχνότητας-χρόνου με τέτοιο τρόπο ώστε η εκτίμηση να είναι ακριβής με μικρότερη όμως πολυπλοκότητα [21]. Τα ζητήματα αυτά εξετάζονται στο σχήμα 6-17. Για μεταβαλλόμενο κανάλι με $f_{d,\max}T = 10^{-2}$ εξετάζονται τρεις διαφορετικές διαδικασίες εκτίμησης. Η πρώτη είναι η απλή εκτίμηση στην μία διάσταση με κατανομή πιλότων της μορφής του σχήματος 3-3-2, της οποίας η πολυπλοκότητα εξαρτάται από τον αριθμό των πιλότων που υπάρχουν στο OFDM σύμβολο (θεωρείται ότι τα φίλτρα χρησιμοποιούν όλους τους πιλότους της διάστασης στην οποία εφαρμόζονται). Για την συγκεκριμένη κατανομή πιλότων είναι $N_f = 6 \Rightarrow N_p = 22$, συνεπώς η πολυπλοκότητα ανά εκτίμηση σε κάθε υπο-φέρουσα είναι 22 πολλαπλασιασμοί. Για την ίδια κατανομή πιλότων ($N_f = 6, N_t = 1$) εφαρμόζεται η δισδιάστατη εκτίμηση με ξεχωριστά φίλτρα για $M = 11$ OFDM σύμβολα. Όπως και προηγουμένως η εκτίμηση είναι καλύτερη αλλά με πολυπλοκότητα $N_p + M = 33$ πολλαπλασιασμούς ανά εκτίμηση, με τον όρο N_p να αντιστοιχεί στην εφαρμογή του φίλτρου στο πεδίο της συχνότητας και τον όρο M στην εφαρμογή του φίλτρου στο πεδίο του χρόνου. Η τρίτη μέθοδος αφορά δισδιάστατη εκτίμηση, με διαφορετική κατανομή πιλότων, συγκεκριμένα με $N_f = 5, N_t = 2$, της μορφής του σχήματος (5-1), πάλι για $M = 11$. Η εκτίμηση με αυτή την κατανομή προκύπτει ότι χρειάζεται περίπου 20,18 πολλαπλασιασμούς ανά υπο-φέρουσα, αριθμός μικρότερος από τις δύο προηγούμενες διαδικασίες εκτίμησης του καναλιού. Από το σχήμα προκύπτει ότι η ακρίβεια της δισδιάστατης εκτίμησης μικρότερης πολυπλοκότητας έχει μικρή πτώση σε σχέση με την πολυπλοκότερη δισδιάστατη εκτίμηση λόγω της χρήσης μικρότερου αριθμού πιλότων, αλλά παραμένει αρκετά καλύτερη από την μονοδιάστατη εκτίμηση. Σημειώνεται ακόμα ότι η κατανομή πιλότων με $N_t = 6, N_t = 1$ απαιτεί το $17{,}18\%$ των εκπεμπόμενων συμβόλων να είναι πιλοτικά, ενώ για την κατανομή με $N_f = 5, N_t = 2$ το ποσοστό αυτό είναι $11{,}08\%$.



1 2

Σχήμα 6-17 Απόδοση της δισδιάστατης εκτίμησης για διαφορετικές κατανομές πιλότων

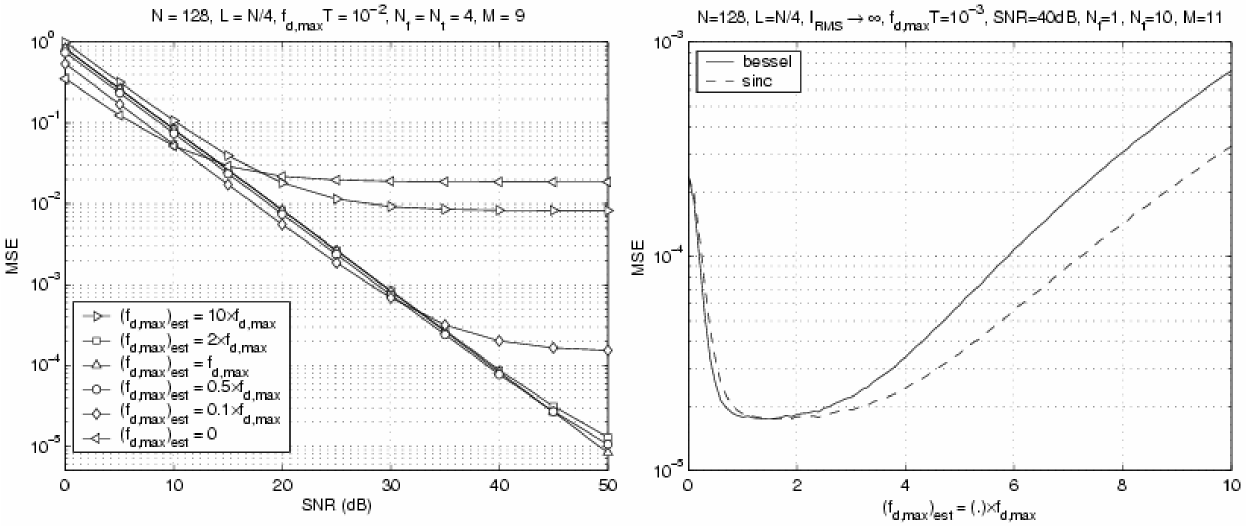
Η πολυπλοκότητα της εκτίμησης μπορεί να μειωθεί ακόμα περισσότερο με εφαρμογή των μεθόδων μείωσης της πολυπλοκότητας των φίλτρων. Για το φίλτρο που εφαρμόζεται στο πεδίο του χρόνου, η μόνη μέθοδος μείωσης της πολυπλοκότητας εκτός της χρήσης φίλτρου μικρότερης τάξης, είναι η απλοποίηση μέσω SVD. Αυτό οφείλεται στο ότι το κανάλι στο πεδίο του χρόνου t δεν μπορεί να περιγραφεί από ένα πεπερασμένο αριθμό διακριτών σημείων, όπως θεωρείται ότι συμβαίνει για την περιγραφή του στην διάσταση τ, και η απλοποίηση μέσω SVD είναι η μόνη μέθοδος στην οποία δεν γίνεται θεώρηση για πεπερασμένη διακριτή περιγραφή του καναλιού. Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 5.3 ο αριθμός των μη αμελητέων ιδιοτιμών του πίνακα αυτοσυσχέτισης του καναλιού στο πεδίο του χρόνου ισούται με καλή προσέγγιση με $r_t = 2 f_{d,\max} (N + N_{cp}) T_s M$. Για την περίπτωση που εξετάστηκε σε αυτή την παράγραφο αυτό σημαίνει ότι μόνο μία ιδιοτιμή είναι μη αμελητέα. Επομένως η πολυπλοκότητα του φίλτρου στο πεδίο του χρόνου θα είναι σύμφωνα με την σχέση της σελίδας 54 (παράγραφος 4.5.2), $1\cdot(1+11/11)=2$ και $1\cdot(1+6/11)\approx 1{,}5$ πολλαπλασιασμοί για την κατανομή πιλότων με $M=11, N_t=1$ και $M=11, N_t=2$ αντίστοιχα, πολύ λιγότεροι σε σχέση με τους 11 και 6 πολλαπλασιασμούς των μη απλοποιημένων φίλτρων. Από προσομοιώσεις που δεν παρουσιάζονται στο κείμενο προκύπτει ότι η εκτίμηση με την παραπάνω απλοποίηση έχει αμελητέα πτώση απόδοσης.

6.3.3 Προσαρμογή του φίλτρου σε διαφορετική στατιστική από την πραγματική

Το πρόβλημα της προσαρμογής του φίλτρου σε στατιστική καναλιού και θορύβου διάφορετική από την πραγματική εξετάστηκε εκτενώς για την εκτίμηση με επεξεργασία σήματος στο πεδίο της συχνότητας, όπου προέκυψε ότι η προσαρμογή του φίλτρου στο χειρότερο δυνατό κανάλι που πρόκειται να αντιμετωπίσει το σύστημα και στο μεγαλύτερο SNR δίνει ικανοποιητική εκτίμηση ανεξάρτητη της πραγματικής στατιστικής. Εφόσον η εκτίμηση σε δύο διαστάσεις διαχωρίζεται σε δύο ανεξάρτητες διαδικασίες εκτίμησης, στην συχνότητα και στον χρόνο, τα παραπάνω αποτελέσματα εφαρμόζονται και στην δισδιάστατη εκτίμηση όσον αφορά την προσαρμογή στην στατιστική του καναλιού στο πεδίο της συχνότητας. Όσον αφορά την προσαρμογή στην στατιστική του καναλιού στο πεδίο του χρόνου, χρήσιμα συμπεράσματα προκύπτουν από το σχήμα 6-18-1 στο οποίο παρουσιάζεται η ακρίβεια της δισδιάστατης εκτίμησης με λανθασμένη θεώρηση της πραγματικής συχνότητας Doppler $f_{d,\max}$ του καναλιού. Φαίνεται ότι η χειρότερη εκτίμηση γίνεται θεωρώντας είτε ότι το κανάλι είναι χρονικά αμετάβλητο, είτε ότι η συχνότητα Doppler είναι πολύ μεγαλύτερη της πραγματικής (κατά μία τάξη μεγέθους), ενώ η θεώρηση συχνότητας Doppler μεταξύ των τιμών $0.5 f_{d,\max}$ έως $2 f_{d,\max}$ δίνει εκτίμηση πολύ κοντά στην εκτίμηση ακριβής προσαρμογής στην πραγματική συχνότητα Doppler για το πεδίο τιμών του SNR του σχήματος. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται παραστατικότερα στο σχήμα 6-18-2, στο οποίο παρουσιάζεται η ακρίβεια της εκτίμησης σε SNR = 40dB με απόκλιση από την πραγματική συχνότητα Doppler, για δύο διαφορετικές θεωρήσεις όσον αφορά την μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης του καναλιού στο χρόνο. Η πρώτη θεώρηση είναι η πραγματική συνάρτηση της αυτοσυσχέτισης του καναλιού της (2.26) (καμπύλη *bessel* στο διάγραμμα) της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier φαίνεται στο σχήμα 2-3-2, ενώ η δεύτερη θεώρηση είναι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της μορφής :

$$r_t(m_1-m_2)=\mathbf{sinc}\left[2\pi f_{d,\max}\left(N+N_{cp}\right)T_s\left(m_1-m_2\right)\right] \tag{6.1}$$

(καμπύλη *sinc* στο σχήμα) της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι τετραγωνικός παλμός στο διάστημα $-f_{d,\max}$ έως $f_{d,\max}$ ($\mathbf{sinc}(x)=\mathbf{sin}(x)/x$). Από το διάγραμμα προκύπτει ότι η θεώρηση της (6.1) παρόλο που διαφέρει από την πραγματική μορφή της αυτοσυσχέτισης του καναλιού δίνει καλύτερη εκτίμηση για προσαρμογή σε διαφορετική συχνότητα Doppler από την πραγματική [23]. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου έχει θεωρηθεί συχνότητα Doppler τέσσερις φορές μεγαλύτερη από την πραγματική ($(f_{d,\max})_{est}=4\times f_{d,\max}$) το μέσο τετραγωνικό σφάλμα για την θεώρηση της (6.1) για τις συγκεκριμένες συνθήκες στις οποίες γίνεται η εκτίμηση είναι ίσο με $2{,}5\cdot 10^{-5}$ ενώ για την θεώρηση της (2.26) το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι ισούται με $3{,}3\times 10^{-5}$.



1 2

Σχήμα 6-18 Προσαρμογή του φίλτρου στο πεδίο του χρόνου σε διαφορετική συχνότητα Doppler και διαφορετική συνάρτηση αυτοσυσχέτισης

Μία ιδιαίτερη περίπτωση απόκλισης του αλγόριθμου εκτίμησης καναλιού από την πραγματική στατιστική του καναλιού είναι η περίπτωση όπου υπάρχει απόκλιση συχνότητας μεταξύ πομπού και δέκτη. Επεκτείνοντας την ανάλυση της (1.14) για την περίπτωση ύπαρξης καναλιού μεταξύ πομπού και δέκτη και το m OFDM σύμβολο, μπορεί να δειχθεί ότι μετά την αποδιαμόρφωση μέσω FFT των OFDM συμβόλων, προκύπτει [37]:

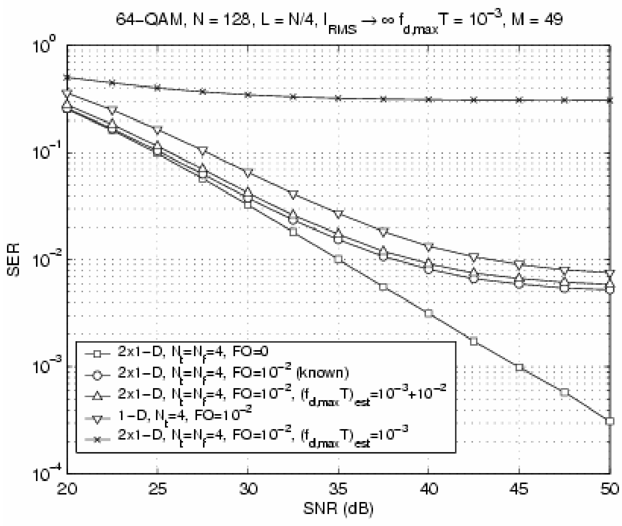
$$Y_m(k) = X_m(k)H_m(k)\frac{1}{N}e^{j2\pi f_0\left(N_{cp}+\left(N+N_{cp}\right)(m-1)\right)}\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi f_0 n} + ICI_m(k) + W_m(k),\ 0\le k\le N-1,\ m=1,2,\ldots, \quad (6.2)$$

όπου f_0 η κανονικοποιημένη απόκλιση συχνότητας. Ο όρος ICI οφείλεται στην απόκλιση συχνότητας η οποία αναιρεί την ορθογωνιότητα μεταξύ των υπο-φέρουσων του συστήματος. Για μεγάλο αριθμό υπο-φέρουσων μπορεί να προσεγγιστεί ως κανονικός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής. Θεωρώντας αμελητέο τον όρο του ICI, μπορεί να θεωρηθεί ο συνδυασμός της επίδρασης καναλιού και απόκλισης συχνότητας από την ισοδύναμη απόκριση $\tilde{H}_m(k) = H_m(k)(1/N)\mathbf{exp}\{j2\pi f_0[N_{cp}+(N+N_{cp})(m-1)]\}\sum_{n=0}^{N-1}\mathbf{exp}\{j2\pi f_0 n\}$, με την αυτοσυσχέτιση ως προς τον χρόνο να δίνεται από την σχέση :

$$r_t(m_1-m_2) = J_0\left[2\pi f_{d,\max}\left(N+N_{cp}\right)T_s\left(m_1-m_2\right)\right]\cdot e^{j2\pi f_0\left(N+N_{cp}\right)\left(m_1-m_2\right)}, \quad (6.3)$$

όπου ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην μεταβολή του καναλιού λόγω φαινομένου Doppler και ο δεύτερος στην απόκλιση συχνότητας. Η θεώρηση του αλγόριθμου εκτίμησης καναλιού μόνο του όρου που οφείλεται στο φαινόμενο Doppler αναμένεται να προκαλέσει σφάλμα εάν η απόκλιση συχνότητας είναι σημαντική.

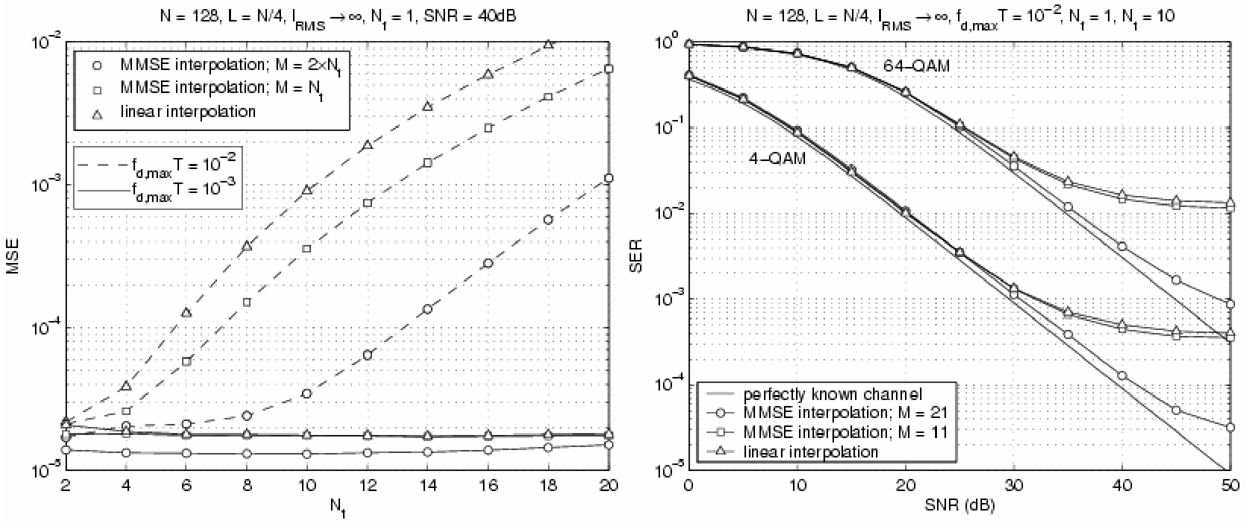
Στο σχήμα 6-19 φαίνεται η απόδοση της δισδιάστατης εκτίμησης (με εφαρμογή δύο ανεξάρτητων φίλτρων) για την περίπτωση όπου υπάρχει απόκλιση συχνότητας $f_0 = 10^{-2}$ και συχνότητα Doppler $f_{d,\max}T = 10^{-3}$, με το φίλτρο στο πεδίο του χρόνου να είναι προσαρμοσμένο σε διάφορες τιμές συχνότητας Doppler. Στην περίπτωση που θεωρηθεί μόνο η μεταβολή λόγω φαινομένου Doppler η εκτίμηση είναι εντελώς λανθασμένη λόγω της ισχυρής επίδρασης της απόκλισης συχνότητας, ενώ εάν είναι γνωστά τα f_0 και $f_{d,\max}$ η εκτίμηση είναι η καλύτερη δυνατή εφόσον είναι γνωστή η ακριβής μορφή της (6.3). Είναι χαρακτηριστικό ότι η εκτίμηση εμφανίζει κάτω όριο στην απόδοση λόγω της ύπαρξης του ICI, για το οποίο έγινε η θεώρηση προηγουμένως ότι είναι αμελητέο, κάτι το οποίο ισχύει σε περιορισμένο πεδίο τιμών του SNR. Ένας άλλος τρόπος αντιμετώπισης της απόκλισης συχνότητας είναι η προσαρμογή του φίλτρου του χρόνου σε συχνότητα Doppler ίση με το άθροισμα $f'_{d,\max} = f_0 + f_{d,\max}$. Στο σχήμα φαίνεται ότι η απόδοση αυτής της μεθόδου είναι πολύ κοντά στην βέλτιστη, που δείχνει ότι εάν το φίλτρο στο πεδίο του χρόνου έχει εύρος ζώνης $f'_{d,\max}$ ο αλγόριθμος εκτίμησης καναλιού είναι ικανός να δώσει εκτίμηση με μικρή πτώση της απόδοσης. Από προσομοιώσεις που δεν παρουσιάζονται στο κείμενο προέκυψε ότι αρκεί το εύρος ζώνης του φίλτρου να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με την συχνότητα $f'_{d,\max}$ ακόμα και αν δεν είναι ακριβώς γνωστή. Επιπλέον στο διάγραμμα παρουσιάζεται η εκτίμηση με επεξεργασία σήματος στην μία διάσταση, η οποία είναι 2,5 με 3dB χειρότερη.



Σχήμα 6-19 Εκτίμηση καναλιού στις δύο διαστάσεις με απόκλιση συχνότητας

6.3.4 Χρήση γραμμική παρεμβολής στο πεδίο του χρόνου

Στις περισσότερες εφαρμογές του OFDM το κανάλι μεταβάλλεται με πολύ αργό ρυθμό. Με βάση αυτή την παρατήρηση είναι ενδιαφέρον να εξεταστεί η απόδοση μιας απλής μεθόδου παρεμβολής, όπως είναι η γραμμική για την εκτίμηση του καναλιού μεταξύ διαδοχικών πιλοτικών OFDM συμβόλων. Θεωρώντας την κατανομή πιλότων του σχήματος 3-3-2, στο σχήμα 6-20-1 παρουσιάζεται η απόδοση της δισδιάστατης εκτίμησης καναλιού με εφαρμογή γραμμικής παρεμβολής στο πεδίο του χρόνου συναρτήσει της απόστασης N_t των πιλοτικών OFDM συμβόλων. Για την εκτίμηση στο πεδίο της συχνότητας χρησιμοποιείται ένας από τους αλγόριθμους εκτίμησης καναλιού με επεξεργασία σήματος σε μία διάσταση που αναφέρθηκαν παραπάνω. Επιπλέον, για την ίδια κατανομή πιλότων παρουσιάζεται και η εκτίμηση με χρήση Wiener φίλτρου στο πεδίο του χρόνου για την περίπτωση όπου η εκτίμηση γίνεται με την λήψη δύο διαδοχικών πιλοτικών OFDM συμβόλων ($M = N_t$) ή τριών ($M = 2N_t$). Για κανάλι με $f_{d,\max}T = 10^{-3}$, τιμή αρκετά μεγαλύτερη από την μέγιστη συχνότητα Doppler που θεωρείται σε πρακτικά συστήματα (για το HIPERLAN/2 είναι $f_{d,\max}T \approx 1{,}6 \cdot 10^{-4}$ [30]) η χρήση γραμμικής παρεμβολής δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα ανεξάρτητα από το N_t (για το εύρος τιμών στο οποίο έγινε η προσομοίωση). Το Wiener φίλτρο με $M = N_t$ έχει την ίδια απόδοση, ενώ για $M = 2N_t$ η βελτίωση δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική. Συνεπώς η χρήση γραμμικής παρεμβολής σε περιβάλλον αργά μεταβαλλόμενου καναλιού είναι ικανοποιητική από πλευράς απόδοσης και πολυπλοκότητας [27]. Για $f_{d,\max}T = 10^{-2}$ η αδυναμία της γραμμικής παρεμβολής είναι εμφανής, αλλά δεν είναι πολύ χειρότερη από την εκτίμηση Wiener φίλτρου με $M = N_t$. Η θεώρηση $M = 2N_t$ και στις δύο περιπτώσεις καναλιού δίνει καλύτερη εκτίμηση λόγω της περισσότερης πληροφορίας που έχει ο αλγόριθμος για το κανάλι.



12

Σχήμα 6-20 Χρήση γραμμικής παρεμβολής για την εκτίμηση καναλιού στο πεδίο του χρόνου

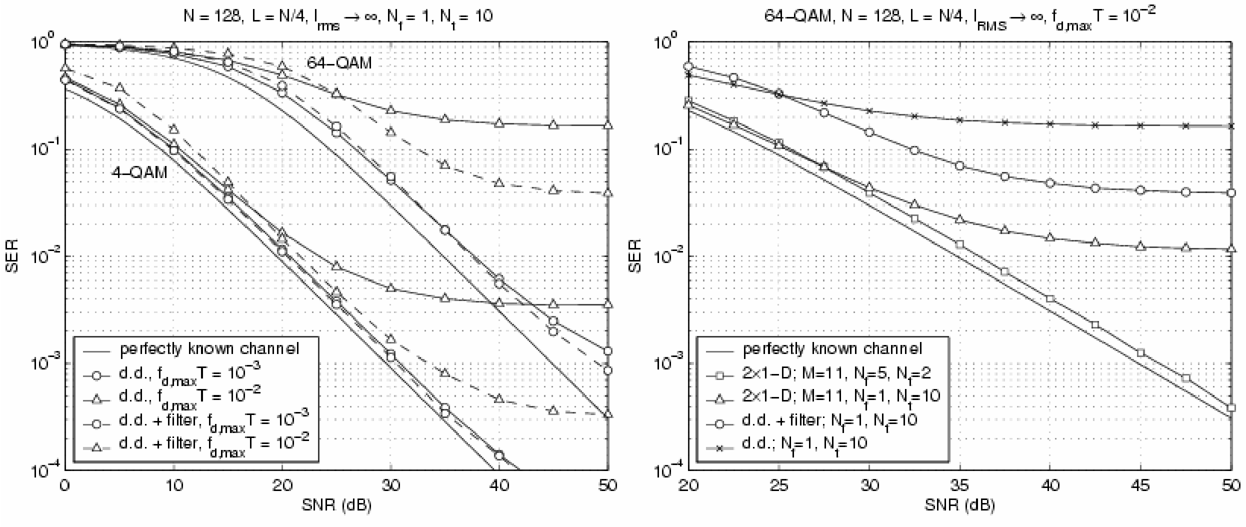
Σημειώνεται ότι η ελάττωση της απόδοσης του Wiener φίλτρου για $f_{d,\max}T = 10^{-2}$ οφείλεται στην μη αποδοτική κατανομή των πιλότων η οποία δίνει στον δισδιάστατο αλγόριθμο εκτίμησης καναλιού υπεραρκετή πληροφορία για το κανάλι στις στιγμές που αντιστοιχούν στα πιλοτικά OFDM σύμβολα και καμία πληροφορία για τις ενδιάμεσες. Στο σχήμα 6-20-2 εμφανίζεται η απόδοση της εκτίμησης των παραπάνω μεθόδων με βάση το SER για κανάλι με $f_{d,\max}T = 10^{-2}$, από την οποία προκύπτει ότι για 4-

QAM διαμόρφωση η χρήση γραμμικής παρεμβολής είναι επαρκής για την επίτευξη ποσοστού σφάλματος 10^{-3}.

6.3.5 Ανάδραση

Μειονέκτημα της εκτίμησης καναλιού με επεξεργασία σήματος στις δύο διαστάσεις είναι η καθυστέρηση που προκαλεί στο σύστημα εφόσον για την εφαρμογή της χρειάζεται ένας συγκεκριμένος αριθμός OFDM συμβόλων στον δέκτη. Σε συστήματα με συνεχή εκπομπή δεδομένων μια τέτοια καθυστέρηση μπορεί να μην είναι αποδεκτή. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η εκτίμηση με βάση την πληροφορία του καναλιού τις προηγούμενες χρονικές στιγμές και μόνο. Η πιο απλή υλοποίηση αυτής της διαδικασίας περιγράφηκε στην παράγραφο 5.5, όπου με την θεώρηση ότι το κανάλι μεταβάλλεται με αργό ρυθμό, για την εξίσωση του καναλιού την χρονική στιγμή m χρησιμοποιείται η εκτίμησή της χρονικής στιγμής $m-1$. Στο σχήμα 6-21-1 φαίνεται η απόδοση της εφαρμογής του αλγορίθμου (d.d. καμπύλη στο σχήμα) για κανάλια με $f_{d,\max}T=10^{-3}$ και $f_{d,\max}T=10^{-2}$ όπου γίνεται περιοδική εκπομπή πιλοτικού OFDM συμβόλου κάθε $N_t=10$ σύμβολα (η κατανομή των πιλότων είναι αυτή του σχήματος 3-3-1). Η LS εκτίμηση της συχνοτικής απόκρισης των πιλοτικών συμβόλων βελτιώνεται με μία από τις μεθόδους επεξεργασίας σήματος που έχουν αναφερθεί παραπάνω. Φαίνεται ότι η εκτίμηση καναλιού με αυτή την μέθοδο είναι ικανοποιητική για αργά μεταβαλλόμενο κανάλι και συγκεκριμένα η απόδοση του συστήματος είναι χειρότερη από το ιδεατό κατά περίπου 1dB και 2,2dB για διαμόρφωση 4-QAM και 64-QAM αντίστοιχα. Για την περίπτωση γρήγορα μεταβαλλόμενου καναλιού η απόδοση παρουσιάζει κάτω όριο καθιστώντας την μέθοδο ανεπαρκή. Στο σχήμα φαίνεται η απόδοση του συστήματος με χρήση φίλτρων για βελτίωση της εκτίμησης (d.d. + filter). Για $f_{d,\max}T=10^{-3}$ η βελτίωση της απόδοσης είναι μικρή, ενώ για $f_{d,\max}T=10^{-2}$ η τιμή του κάτω ορίου πέφτει σε αρκετά μικρότερη τιμή. Για την περίπτωση 4-QAM διαμόρφωσης επιτυγχάνεται ποσοστό σφάλματος 10^{-3} με κόστος 3,5 dB περισσότερή ισχύ από το ιδεατό σύστημα. Συνεπώς η διαδικασία αυτή μπορεί να είναι επαρκής σε εφαρμογές με χρήση διαμόρφωσης χαμηλής τάξης (BPSK, 4-QAM).

Στο σχήμα 6-21-2 γίνεται σύγκριση μεταξύ των μεθόδων που περιγράφηκαν παραπάνω για εκτίμηση με μηδενική καθυστέρηση και της εκτίμησης με επεξεργασία σήματος σε δύο διαστάσεις όπως παρουσιάστηκε στις προηγούμενες παραγράφους και η οποία προκαλεί καθυστέρηση στο σύστημα. Για την ίδια κατανομή πιλότων με αυτή για την οποία προέκυψαν οι καμπύλες του σχήματος 6-21-1 ($N_f=1, N_t=10$) είναι εμφανής η καλύτερη απόδοση που έχει η δισδιάστατη εκτίμηση η οποία κάνει χρήση δύο διαδοχικών πιλοτικών OFDM συμβόλων ($M=11$), εφόσον η εκτίμηση βασίζεται αποκλειστικά σε πιλότους οπότε αποφεύγεται η εξάρτηση από τα ανιχνευμένα σύμβολα τα οποία πιθανόν να είναι λανθασμένα. Λόγω της μη αποδοτικής κατανομής των πιλότων παρουσιάζεται κάτω όριο στην απόδοση το οποίο όμως μπορεί εύκολα να διορθωθεί με χρήση διαφορετικής κατανομής πιλότων ($N_f=5, N_t=2$).



1 2

Σχήμα 6-21 Χρήση ανάδρασης για την εξίσωση καναλιού και βελτίωση της απόδοσης με χρήση φίλτρων

7. Συμπεράσματα

Η εκτίμηση καναλιού εκτός από σημαντική διαδικασία για την ανίχνευση των συμβόλων είναι και η πιο δύσκολη. Αυτό φαίνεται από την σύγκριση του προβλήματος εκτίμησης καναλιού με το πρόβλημα εκτίμησης της απόκλισης συχνότητας. Στην πρώτη περίπτωση το ζητούμενο είναι η εύρεση L μιγαδικών αριθμών, όσα και τα σημεία της διακριτής κρουστικής απόκρισης, ενώ στην δεύτερη περίπτωση άγνωστος είναι ένας πραγματικός αριθμός. Η παρατήρηση αυτή δικαιολογεί την δυσκολία της εκτίμησης του καναλιού χωρίς χρήση πιλότων, σε αντίθεση με την εκτίμηση της απόκλισης συχνότητας για την οποία έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι που δεν κάνουν χρήση πιλότων.

Από τις διάφορες μεθόδους εκτίμησης καναλιού με χρήση πιλότων η πιο απλή είναι η πολυωνυμική παρεμβολή. Από τις προσομοιώσεις φάνηκε ότι τα αποτελέσματα της εκτίμησης με αυτή την μέθοδο δεν είναι ικανοποιητικά όσον αφορά την παρεμβολή στο πεδίο της συχνότητας, επειδή η συχνοτική απόκριση μεταβάλλεται έντονα μεταξύ διαδοχικών συχνοτήτων. Αντίθετα στο πεδίο του χρόνου η πολυωνυμική παρεμβολή δίνει καλά αποτελέσματα σε συνθήκες όπου το κανάλι μεταβάλλεται αργά.

Καλύτερη εκτίμηση δίνουν οι μέθοδοι επεξεργασίας σήματος που βασίζονται στο πεπερασμένο φάσμα της συχνοτκής απόκρισης, που σημαίνει πεπερασμένη διάρκεια κρουστικής και πεπερασμένη μέγιστη συχνότητα Doppler. Για την εκτίμηση καναλιού με αυτές τις μεθόδους είναι απαραίτητο ο αριθμός των πιλότων στο πεδίο της συχνότητας να είναι μεγαλύτερος ή ίσος των σημείων της κρουστικής απόκρισης. Ο περιορισμός αυτός προκύπτει από το θεώρημα δειγματοληψίας και από την παρατήρηση ότι η συχνοτική απόκριση αποτελεί γραμμικό μετασχηματισμό των L αγνώστων σημείων της κρουστικής απόκρισης άρα απαιτούνται τουλάχιστον L εξισώσεις για την εύρεσή τους. Αντίστοιχος περιορισμός υπάρχει και για την κατανομή των πιλότων στο πεδίο του χρόνου.

Όπως φάνηκε από την ανάλυση η γνώση της διάρκειας του καναλιού είναι πολύ σημαντική στην βελτίωση της εκτίμησης. Εάν ο αριθμός L των σημείων της διακριτής κρουστικής απόκρισης είναι γνωστός, τότε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης είναι L/N φορές μικρότερο από την απλή εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων, που με βάση το ποσοστό λανθασμένης εκτίμησης συμβόλων (SER) σημαίνει κέρδος τουλάχιστον 1 dB σε συνθήκες όπου η κρουστική απόκριση είναι μεγάλης διάρκειας σε σχέση με την διάρκεια του OFDM συμβόλου. Προφανώς όσο μικρότερο είναι το L τόσο μεγαλύτερο ποσοστό του θορύβου μπορεί να αποκοπεί, κάτι που φανερώνει ότι η χρήση μεγάλου N του συστήματος είναι επιθυμητή. Επιπλέον η χρήση του κυκλικού προθέματος στο OFDM επιτρέπει την εκτίμηση της άγνωστης διάρκειας της κρουστικής ως ίσης με N_{cp}, τιμή που δεν απέχει πολύ από το L εφόσον θεωρείται ότι το σύστημα είναι σχεδιασμένο ώστε το κυκλικό πρόθεμα να είναι μεγαλύτερο του L και ταυτόχρονα όσο το δυνατόν μικρότερο για εξοικονόμηση ενέργειας και εύρους ζώνης..

Η βέλτιστη εκτίμηση είναι η MMSE εκτίμηση για την επίτευξη της οποίας είναι απαραίτητη η γνώση της στατιστικής καναλιού και θορύβου. Για το απλό μοντέλο καναλιού που θεωρήθηκε στο κείμενο αυτό σημαίνει γνώση των μεγεθών l_{RMS} και SNR. Σε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο καναλιού, όπου τα σημεία του σχετίζονται μεταξύ τους, και η κατανομή της ισχύος είναι πιο πολύπλοκη από την εκθετική, η γνώση των παραμέτρων που χρειάζονται για την πραγματοποίηση MMSE εκτίμησης είναι πρακτικά αδύνατη. Το θέμα της προσαρμογής του Wiener φίλτρου σε άγνωστη στατιστική καναλιού και θορύβου εξετάστηκε εκτενώς στην ανάλυση και στις προσομοιώσεις. Όσον αφορά την εκτίμηση στην διάσταση της συχνότητας, η προσαρμογή στις χειρότερες δυνατές συνθήκες εγγυάται εκτίμηση για όλες τις συνθήκες. Τότε όμως η εκτίμηση είναι αντίστοιχη με αυτή ενός απλού φίλτρου που κάνει χρήση της γνώσης της μέγιστης διάρκειας της κρουστικής του οποίου η απόδοση είναι ανεξάρτητη της στατιστικής καναλιού και θορύβου. Επιπλέον, για τα κανάλια που θεωρήθηκαν στο κείμενο, ακόμα και στην περίπτωση της γνώσης των παραμέτρων l_{RMS} και SNR η απόδοση της MMSE εκτίμησης είναι αισθητά καλύτερη μόνο για μικρές τιμές του SNR. Οι παρατηρήσεις αυτές οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η χρήση απλού φίλτρου είναι ικανοποιητική, αφενός επειδή η απόδοση του Wiener φίλτρου δεν δίνει μεγάλο κέρδος, αφετέρου επειδή στην πράξη η τέλεια γνώση των παραμέτρων του καναλιού είναι αδύνατη. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγεί και η σύγκριση της εκτίμησης του IDFT-DFT φίλτρου με την χρήση του αλγόριθμου NLMS.

Πολύ σημαντική είναι η παρατήρηση ότι η προσαρμογή του φίλτρου στο πεδίο του χρόνου στην μεταβολή που περιγράφεται από την σχέση (2.26) δίνει καλύτερα αποτελέσματα από την θεώρηση της πραγματικής μεταβολής στην περίπτωση που η εκτίμηση της μέγιστης συχνότητας Doppler είναι λανθασμένη. Σε περίπτωση που υπάρχει και απόκλιση συχνότητας η εφαρμογή φίλτρου στο πεδίο του χρόνου κατάλληλου εύρους ζώνης μειώνει αρκετά την επίδρασή του

Με στόχο την μείωση της πολυπλοκότητας της εκτίμησης εξετάστηκαν ορισμένες απλοποιήσεις του Wiener φίλτρου όπως είναι η απλοποίηση με χρήση των μετασχηματισμών IFFT-FFT και SVD. Η βασική διαφορά των δύο προσεγγίσεων είναι ότι η πρώτη βασίζεται στην θεώρηση της περιγραφής του καναλιού από $L < N$ σημεία, ενώ η δεύτερη είναι γενικότερη. Στην περίπτωση που αυτό ισχύει ο μετασχηματισμός SVD συμπίπτει με τον DFT. Και οι δύο μέθοδοι έχουν μικρότερη πολυπλοκότητα από το Wiener φίλτρο χωρίς μείωση της ακρίβειας της εκτίμησης. Από την ανάλυση προέκυψε ότι η χρήση των μετασχηματισμών IFFT-FFT για την MMSE εκτίμηση του καναλιού είναι η μέθοδος με την μικρότερη πολυπλοκότητα από όλες τις άλλες, αλλά με αδυναμία εφαρμογής της σε συστήματα με αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες. Η μέθοδος που κάνει χρήση του μετασχηματισμού SVD αν και είναι πιο πολύπλοκη μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με αδιαμόρφωτες υπο-φέρουσες και επιπλέον εφόσον δεν στηρίζεται στην παραδοχή της περιγραφής του καναλιού από πεπερασμένο αριθμό σημείων μπορεί να εφαρμοστεί και για την απλοποίηση φίλτρων που εφαρμόζονται στο πεδίο του χρόνου.

Μέχρι σήμερα το OFDM έχει εφαρμοσθεί μόνο σε συνθήκες όπου το κανάλι είναι τόσο αργά μεταβαλλόμενο ώστε να θεωρείται σε πολύ καλή προσέγγιση ως στατικό για έναν μεγάλο αριθμό διαδοχικών συμβόλων. Σε αυτές τις συνθήκες η εκτίμηση καναλιού με χρήση ενός μόνο πιλοτικού OFDM συμβόλου και εφαρμογή αλγόριθμου εκτίμησης καναλιού με επεξεργασία σήματος σε μία διάσταση είναι ικανοποιητική. Η δυσκολία στην εκτίμηση καναλιού εμφανίζεται όταν το κανάλι μεταβάλλεται γρήγορα. Σε μία τέτοια περίπτωση για να έχει η εκτίμηση ικανοποιητικά αποτελέσματα και ο αριθμός των πιλότων να μην είναι υπερβολικά μεγάλος, γίνεται χρήση των αλγόριθμων επεξεργασίας σήματος σε δύο διαστάσεις, οι οποίοι αποτελούν γενίκευση των προηγουμένων. Εφόσον θεωρείται ότι η μεταβολή του καναλιού είναι ανεξάρτητη ανάμεσα στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας το δισδιάστατο πρόβλημα μπορεί να χωρισθεί σε δύο μονοδιάστατα μειώνοντας έτσι κατά πολύ και την πολυπλοκότητα της εκτίμησης. Γενικά η εκτίμηση με αυτές τις μεθόδους δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα με μειονέκτημα την μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, την χρονική καθυστέρηση που προκαλείται στο σύστημα και την χρήση μεγαλύτερης μνήμης για την προσωρινή αποθήκευση των OFDM συμβόλων. Μία μέθοδος που δεν προκαλεί καθυστέρηση στο σύστημα είναι η χρήση ανάδρασης σε συνδυασμό με φίλτρα στο πεδίο του χρόνου που χρησιμοποιούν την εκτίμηση του καναλιού προηγούμενων χρονικών στιγμών. Η μέθοδος αυτή είναι ικανοποιητική κυρίων σε σχετικά αργά μεταβαλλόμενα κανάλια.

Στην βιβλιογραφία η εκτίμηση καναλιού σε OFDM σύστημα έχει μελετηθεί εκτεταμένα αλλά σχεδόν πάντα με την θεώρηση τέλειου συγχρονισμού μεταξύ πομπού και δέκτη. Στην πράξη κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό με αποτέλεσμα η παρουσία απόκλισης συχνότητας και θορύβου φάσης να κάνει το πρόβλημα αρκετά διαφορετικό και δυσκολότερο. Η ταυτόχρονη εκτίμηση όλων αυτών των παραμέτρων είναι ένα θέμα που δεν έχει εξεταστεί εκτεταμένα.

Βιβλιογραφία

[1] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. McGraw-Hill, 2001.

[2] A. Oppenheim, R. Schafer and J. Buck, *Discrete-time signal processing*, 2nd ed. Prentice Hall, 1999.

[3] A. Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. McGraw-Hill, 2002.

[4] G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed. Saunders College Publishing, 1988.

[5] S. Haykin, *Adaptive filter theory*, 3rd ed. Prentice Hall, 1996.

[6] M. Alouini and A.Goldsmith, “A unified approach for calculating error rates of linearly modulated signals over generalized fading channels,” *IEEE Trans. Commun*., vol. 47, pp. 1324-1334, Sep. 1999.

[7] J. K. Cavers, “An analysis of pilot symbol assisted modulation for rayleigh fading channels,” *IEEE Trans. Vehic. Tech*., vol. 40, pp.686-693, Nov. 1991.

[8] H. Cheon and D. Hong, “Effect of channel estimation error in OFDM-based WLAN,” *IEEE Commun. Lett*., vol. 6, pp. 190-192, May 2002.

[9] J. Rinne and M. Renfors, “Pilot spacing in orthogonal frequency division multiplexing systems on practical channels,” *IEEE Trans. Consumer Elect*., vol. 42, pp. 959-962, Nov. 1996.

[10] M. H. Hsieh and C. H. Wei, “Channel estimation for OFDM systems based on comb-type pilot arrangement in frequency selective fading channels*,”* *IEEE Trans. Consumer Elect*., vol. 44, pp. 217-225, Feb. 1998.

[11] J. K. Moon and S. I. Choi, “Performance of channel estimation methods for OFDM systems in a multipath fading channel,” *IEEE Trans. Consumer Elect*., vol. 46, pp. 161-170, Feb. 2000.

[12] S. Coleri, M. Ergen, A. Puri and A. Bahai, “Channel estimation techniques based on pilot arrangement in OFDM systems,” *IEEE Trans. Broadcast*., vol 48, pp. 223-229, Sept. 2002.

[13] M. Sandell and O. Edfors, “A comparative study of pilot-based channel estimators for wireless OFDM,*”* Research Report TULEA 1996:19, Division of Signal Processing, Lulea University of Technology, Sep. 1996.

[14] P. Hoeher, S.Kaiser and P.Robertson, “Two-dimensional pilot-symbol-aided channel estimation by Weiner filtering,” in *Proc. 49th IEEE Veh. Technol. Conf.*, Houston, TX, pp 468-472.

[15] —, “Pilot-symbol-aided channel estimation in time and frequency,” in *Proc. 1997 IEEE Global Telecomm. Conf. The Mini-Conf.*, Phoenix, AZ, Nov. 1997, pp. 90-96.

[16] P. Hoeher, “TCM on frequency-selective land-mobile fading channels,” in *Proc. Tirrenia Int. Workshop Digital Commun*., Tirrenia, Italy, Sep. 1991

[17] O. Edfors, M. Sandell, J.J. van de Beek, S.K. Wilson, and P.O. Borjesson, "OFDM channel estimation by singular value decomposition," *IEEE Trans. Commun*., vol. 46, pp. 931-939, July 1998.

[18] M.Morelli and U.Mengali, "A comparison of pilot-aided channel estimation methods for OFDM systems," *IEEE Trans. Signal Processing*., vol. 49, pp.3065-3073, Dec. 2001.

[19] R. Negi and J. Cioffi, "pilot tone selection for channel estimation in a mobile OFDM system," *IEEE Trans. Consumer Elect*., vol. 44, pp.1122-1128, Aug. 1998.

[20] V. Mignone and and A. Morello, "CD-3 OFDM: A novel demodulation scheme for fixed and mobile receivers," *IEEE Trans. Commun*., vol. 44, pp. 1144-1151, Sept.1996.

[21] M. Garcia, S. Zazo and J. Borrallo, "Pilot patterns for channel estimation in OFDM," *IEEE Elect. Lett*., vol. 16, pp.1049-1050, June 2000

[22] Y. Li. "Pilot-symbol-aided channel estimation for OFDM in wireless systems," *IEEE Trans. Veh. Technol*., vol. 48 , pp. 1207-1215, July 2000.

[23] Y. Li, L. Cimini and N. Sollenberger, "Robust channel estimation for OFDM systems with rapid dispersive fading channels," *IEEE Trans. Commun*., vol. 46, pp. 902-914, July 1998.

[24] Y. Li and N. Sollenberger, "Clustered OFDM with channel estimation for high rate wireless data," *IEEE Trans. Commun.,* vol.49, pp.2071-2075, Dec. 1995.

[25] P. Frenger and N. Svensson, "Decision-directed coherent detection in multicarrier systems on rayleigh fading channels," *IEEE Trans. Veh. Technol*. Vol. 48, pp. 490-498, Mar. 1999.

[26] M. Bossert, A. Donder and V. Zyablov, "Improved channel estimation with decision feedback for OFDM systems," *IEEE Elect. Lett*., vol. 64, pp. 1064-1065, May 1998.

[27] M. Speth, S. Fechtel, G. Fock and H. Meyr, "Optimum receiver design for OFDM-based broadband transmission – Part II: A case study," *IEEE Trans. Commun*., vol. 49, pp. 571-578, Apr. 2001.

[28] Y. Choi, P. Voltz and F. Cassara, "On channel estimation and detection for multicarrier signals in fast and selective rayleigh fading channels," *IEEE Trans. Commun*., vol. 49, pp. 1375-1387. Aug. 2001.

[29] Y.G. Li, L.J. Cimini, "Bounds on the interchannel interference of OFDM in time – varying impairments," *IEEE Trans. Commun*., vol. 49, pp.401-404, Mar. 2001.

[30] B. Muquet, M. Courville and P. Duhamel, "Subspace-based blind and semi-blind channel estimation for OFDM systems," *IEEE Trans. Signal Processing*., vol. 50, pp. 1699-1712, July 2002.

[31] R. Heath and G. Giannakis, "Exploiting input cyclostationarity for blind channel identification in OFDM systems," *IEEE Trans. Signal Processing*., vol. 47, pp. 848-856, Mar. 1999.

[32] S. Zhou and G. Giannakis, "Finite-Alphabet based channel estimation for OFDM and related multicarrier systems," *IEEE Trans. Commun*., vol. 49, pp. 1402-1414, Aug. 2001.

[33] J. van de Beek, O. Edfors, M.Sandell, S.K. Wilson, and P.O. Borjesson, “On channel estimation in OFDM systems,” in *Proc. 45th IEEE Veh. Tech. Conf.*, Chicago, IL, July 1995, pp.815-819.

[34] H. Minn, D. Kim and V. Bhargava, “A reduced complexity channel estimation for OFDM systems with transmit diversity in mobile wireless channels,” *IEEE Trans. Commun*., vol. 50, pp. 799-807, May 2002.

[35] B. Yang, Z. Cao and K.B. Letaief, “Analysis of low-complexity windowed DFT-based MMSE channel estimator for OFDM Systems,” *IEEE Trans. Commun*., vol. 49, pp. 1977-1987, Nov. 2001.

[36] F. Sanzi and J. Speidel, “An adaptive two-dimensional channel estimator for wireless OFDM with application to mobile DVB-T,” *IEEE Trans. Broadcast*., vol. 46, pp. 128-133, June 2000.

[37] X. Ma, C. Tepedelenlioglu, G. Giannakis and S. Barbarossa, “Non-data-aided carrier offset estimators for OFDM with null subcarriers: identifiability, algorithms, and performance,” *IEEE J. Select. Areas Commun*., vol. 19, pp. 2504-2515, Dec. 2001.

[38] Z. Wang and G. Giannakis, “Wireless multicarrier communications: Where Fourier meets Shannon,” *IEEE Signal Processing Mag*., vol. 17, pp. 29–48, May 2000.

[39] P. Hoeher, “A statistical discrete-time model for the WSSUS multipath channel,” IEEE Trans. Veh. Technol., vol. 41, pp. 461-468, Nov. 1992.