



---

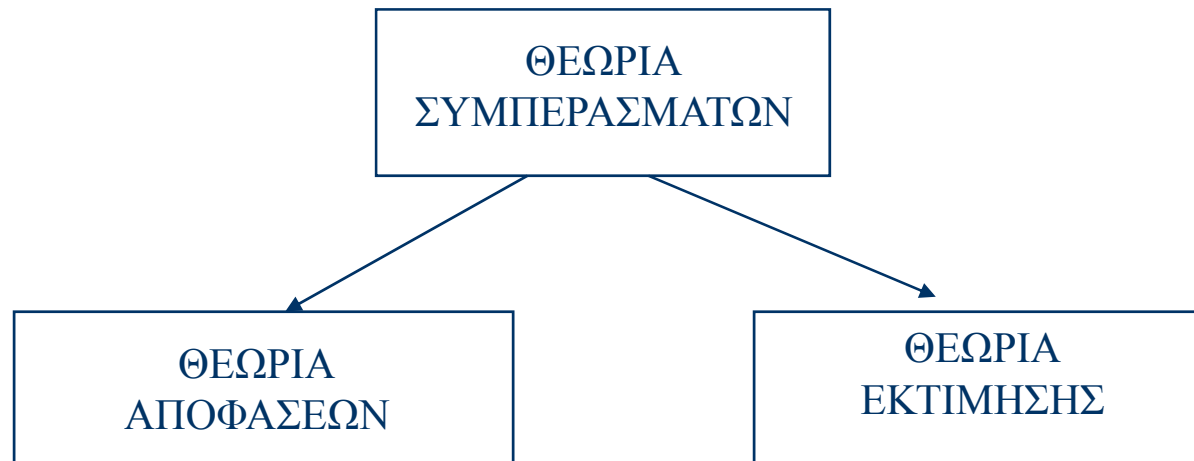
# *Stochastic Signals Class* *Estimation Theory*

---

*Andreas Polydoros*  
*University of Athens*  
*Dept. of Physics*  
*Electronics Laboratory*

# Τι είναι «Εκτίμηση» (Estimation)?

Γενικό Πλαίσιο: Θεωρία και Πράξη Συμπερασμάτων (Inference)



Αποφαση: διαλέγω μια απο συγκεκριμενο αριθμο περιπτωσεων

Εκτιμηση: διαλέγω μια απο απειρο αριθμο περιπτωσεων

Παραδειγματα:

- κρινω αν ερχεται αεροπλανο η οχι βασει radar
- κρινω αν το bit που εστειλε ενας πομπος ειναι +1 η -1
- αποφασιζω με τι βαθμο θα βαθμολογισω καποιον

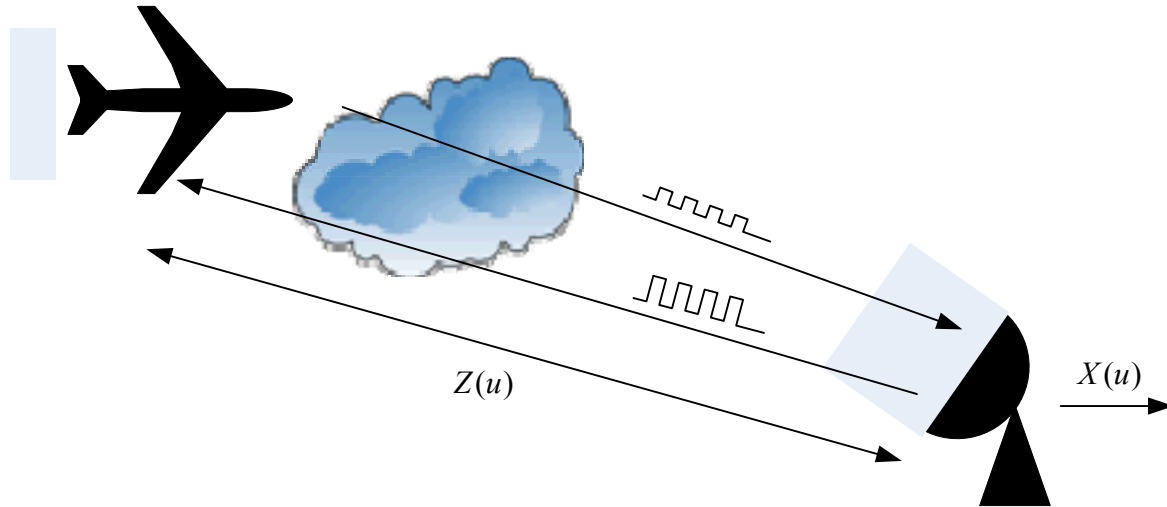
Παραδειγματα:

- μετρω («εκτιμω») απο ποια γωνια ερχεται το αεροπλανο
- εκτιμω ποση ειναι η ισχυς ενος πομπου
- μετρω το βαρος ενος ανθρωπου, η ενα ηλεκτρικο δυναμικο, η μια οποιαδηποτε αλλη μετρηση που δεν ειναι «τελεια»

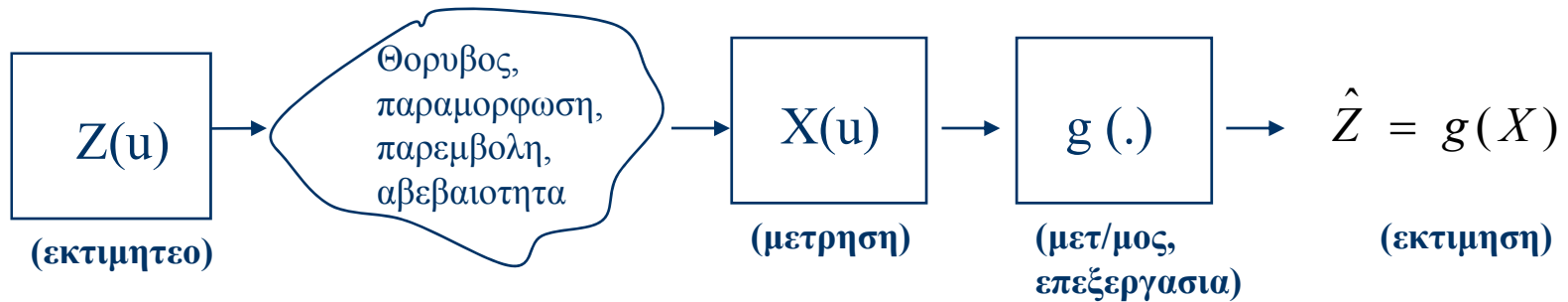
**Αυτο που κανει το προβλημα ενδιαφερον ειναι η αβεβαιοτητα στα δεδομενα βασει των οποιων λαμβανεται μια αποφαση η γινεται μια εκτιμηση**

# Γιατι αβεβαιοτητα?

- ❑ Ολες οι μετρησεις (measurement), παρατηρησεις (observation), καταγραφη δεδομενων (data record) εμπεριεχουν αβεβαιοτητα, αρα πρεπει να προσεγγιστουν πιθανολογικα (στοχαστικα).
- ❑ Η πηγη της αβεβαιοτητας μπορει να ειναι θορυβος μετρησης, παρεμβολη, παραμορφωση σηματος, κλπ.
- ❑ Αρα, αυτο που θελουμε να εκτιμησουμε ( $Z$ ) συνδεεται μεν, αλλα δεν ταυτιζεται με αυτο που μετραμε, την παρατηρηση ( $X$ )



# Μοντέλο συστηματος



Λογω των αβεβαιοτητων η εκτιμηση δεν θα ειναι συνηθως επακριβως σωστη, αρα θα εχουμε σφαλμα ισο με

$$E(u) = Z(u) - \hat{Z}(u) = Z(u) - g(X(u))$$

το οποιο σφαλμα:

- ειναι στατιστικο (δηλ. τυχαια μεταβλητη) αφου και το  $Z(u)$  και το  $X(u)$  ειναι τ.μ.
- εξαρταται απο την στατιστικη σχεση  $Z$  και  $X$ , δηλ. την απο κοινου σ.π.π. (pdf)
- εχει στατιστικες τιμες που μπορουν να υπολογιστουν, αλλα εν γενει μας αφορα κυριως η μεση τιμη  $\bar{E}(u) = \mathcal{E}\{E(u)\}$  και η δευτερη ροπη  $\mathcal{E}\{(Z - g(X))^2\}$

# Κριτηρια

Το ποια είναι η «σώστη» συναρτησης εκτιμησης ( ο μετ/μος  $g(\cdot)$ ) εξαρταται απο το λεγομενο κριτηριο που υιοθετουμε. Διαφορετικα κριτηρια οδηγουν σε διαφορετικες λυσεις.

Σημειωση:

- καμια λυση δεν είναι «καλυτερη» απο μια αλλη αν αντιστοιχουν σε διαφορετικα Κριτηρια
- Μπορουμε να συγκρινουμε μονον λυσεις για το ιδιο κριτηριο: η «βελτιστη» λυση για το κριτηριο  $K$ , μια κατωτερη λυση για το κριτηριο  $K$ , κλπ.
- Εμεις θα αναζητησουμε τις βελτιστες λυσεις για ενα συγκεκριμενο κριτηριο, το Μεσο Τετραγωνικο Σφαλμα (mean square error)

Μερικες άλλες υποψηφιες επιλογες για κριτηρια:

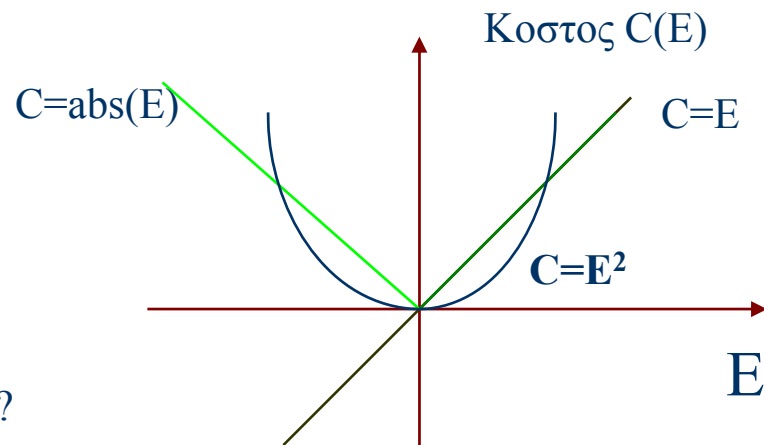
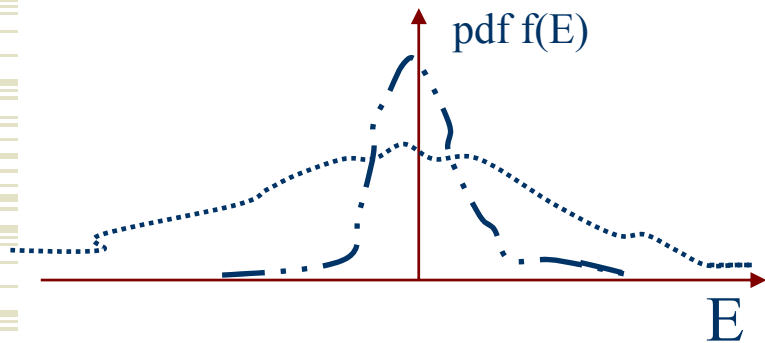
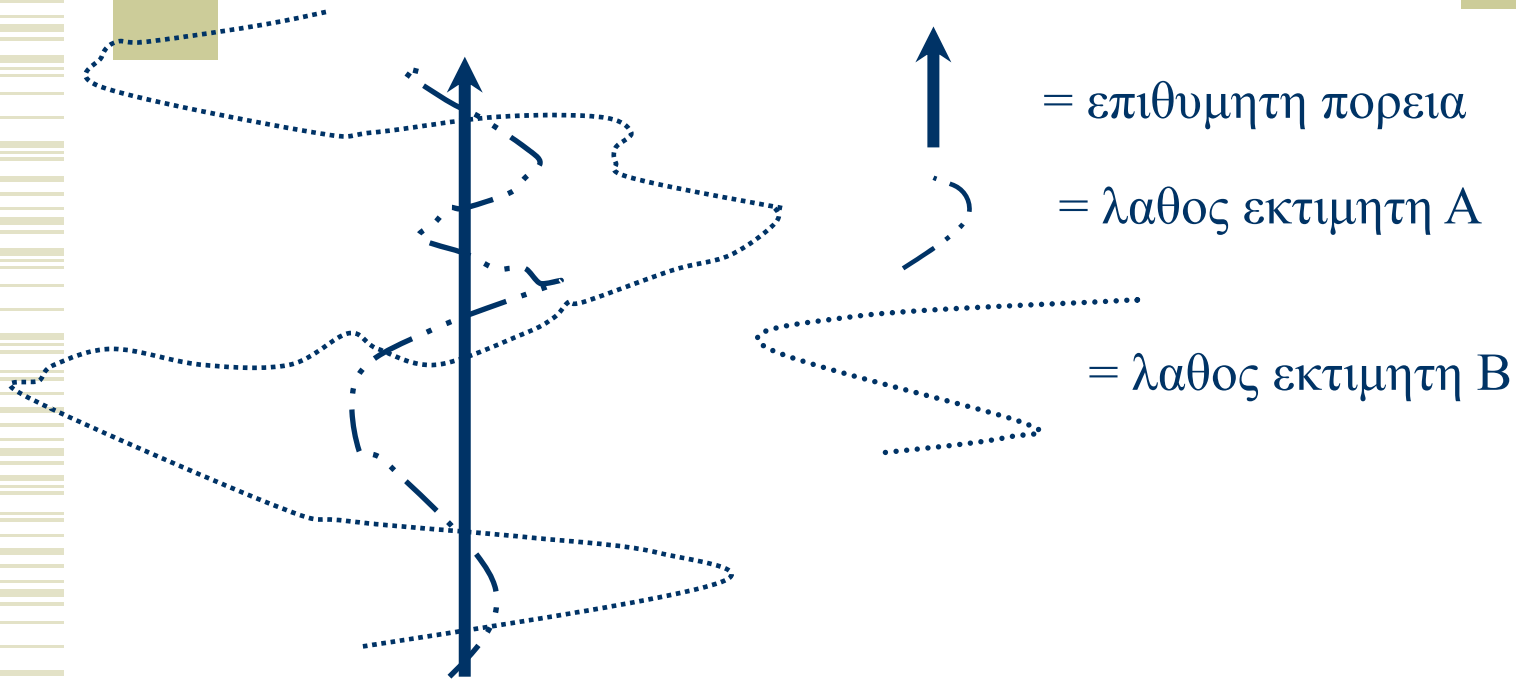
➤ Μεσο σφαλμα  $\mathcal{E}\{(Z - g(X))\}$

➤ μεσο απολυτο σφαλμα  $\mathcal{E}\{|Z - g(X)|\}$

➤ Μεσο τετραγωνικο σφαλμα (MSE)  $\mathcal{E}\{(Z - g(X))^2\}$

- Εν γενει, θελουμε να ελαχιστοποιησουμε τη μεση τιμη μιας συναρτησης  $C(E)$  του σφαλματος  $E$
- Η συναρτηση αυτη ,  $C(E)$ , λεγεται **κοστος** του σφαλματος
- Αρα διαλεγουμε τον εκτιμητη  $g(\cdot)$  ετσι ωστε να ελαχιστοποιηθει το μεσο κοστος (η μεση τιμη λαμβανεται υπο την κοινή κατανομη των  $Z$  και  $X$ )

# Περι σφαλμάτων και κριτηριων



Ερωτηση: ειναι καλο κριτηριο το μεσο σφαλμα?

# Λυση για το ΜΤΣ

Μαθηματικός Ορισμός:

Να βρεθεί η  $g(x)$  που ελαχιστοποιεί την  $MSE = \mathcal{E} \left\{ (Z - g(X))^2 \right\}$

Απάντηση:

(α) Για  $g(x) = \mathbf{a}$  (μια σταθερά, μη συνάρτηση του  $x$ ),  $\mathbf{a} = \mathcal{E} \{ Z(u) \}$

Σημείωση: τι σημαίνει «σταθερή απάντηση»?

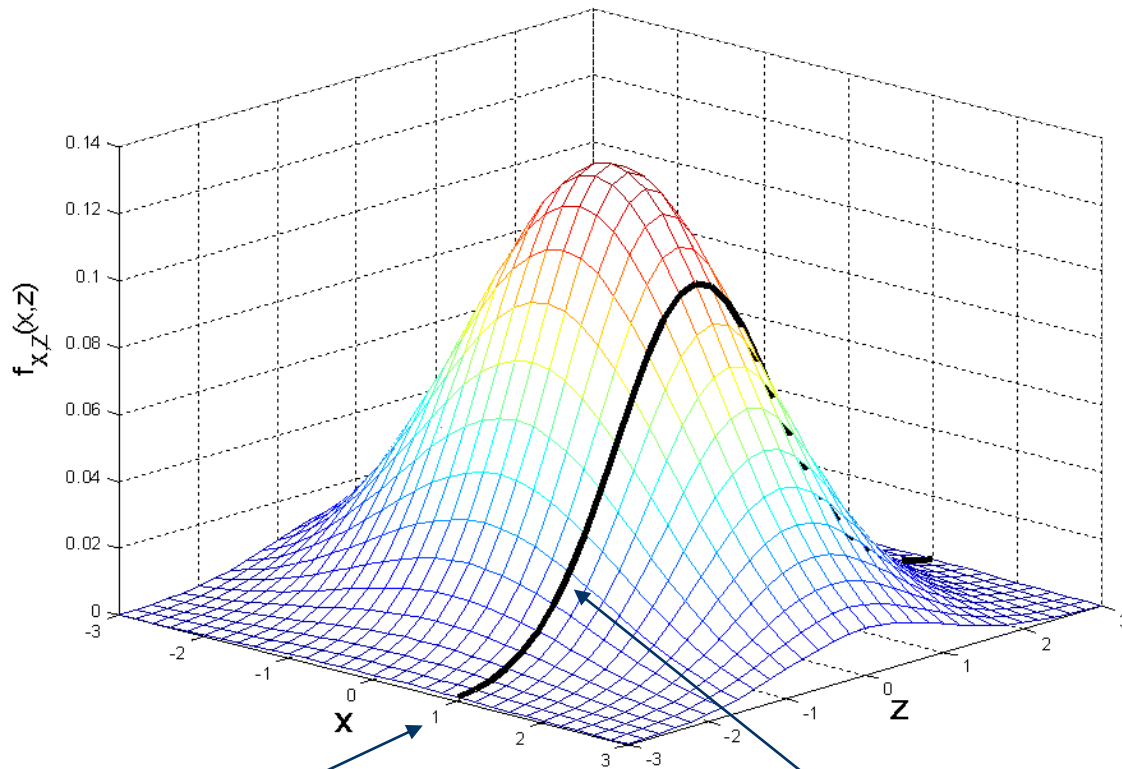
(β) Για την γενική περίπτωση,  $g(X) = \mathcal{E} \{ Z / X \}$

Το εναπομείναν, ελαχιστο δυνατό σφάλμα ισούται με

$$\mathcal{E} \left\{ (Z - \mathcal{E} \{ Z / X \})^2 \right\} = \mathcal{E} \{ Z^2 \} - \mathcal{E} \{ \hat{Z}^2 \} \quad (\text{να δειχθεί!})$$

Όλοι οι άλλοι εκτιμητές θα έχουν σφάλμα μεγαλύτερο ή ίσο με αυτό.

# Πως βρισκεται ο υπο-συνθηκη μεσος ορος?



$$X = x_0$$

$$f_{Z|X}(z|x_0) = \frac{f_{Z,X}(z,x_0)}{f_X(x_0)} = \frac{f_{Z,X}(z,x_0)}{\int f_{Z,X}(z,x_0) dz}$$



# Λυση για το ΜΤΣ υπο τον γραμμικο περιορισμο

Εαν επιμενουμε σε μια απλη λυση, π.χ., γραμμικη της μορφης

$$\hat{Z} = g(X) = aX + b$$

τοτε η βελτιστη λυση ειναι

$$\hat{Z} = g(X) = \frac{\rho_{ZX}\sigma_Z}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Z$$

και εξαρταται μονον απο τις μεσες τιμες και τυπικες αποκλισεις των  $Z$  και  $X$ , καθως και τον συντελεστη συσχετισης τους  $\rho_{ZX}$ .

➤ Εαν οι  $Z$  και  $X$  ειναι ασυσχετιστες μεταξυ τους (ο συντελεστης  $\rho$  ειναι μηδεν), τοτε η εκτιμηση της  $Z$  ειναι η σταθερα μεση τιμη της, δηλ. αγνοουμε την μετρηση αφου δεν μας λειει τιποτα για την  $Z$  στα πλαισια της γραμμικης εκτιμησης.

## Ειδικη περιπτωση: προσθετικος θορυβος

$$X = Z + N \quad \text{με } Z(u), N(u) \text{ ανεξαρτητες τ.μ.}$$

Η γενικη λυση ειναι

$$\mathcal{E}\{Z|X\} = \int z f_{Z|X}(z|x) dz$$

οπου

$$f_{Z|X}(z|x) = \frac{f_{Z,X}(z,x)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Z}(x|z)f_Z(z)}{f_X(x)} = \frac{f_N(x-z)f_Z(z)}{f_Z \otimes f_N(x)}$$

Η γραμμικη λυση ειναι

$$\hat{Z} = m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \sigma_N^2} (X - m_X)$$