



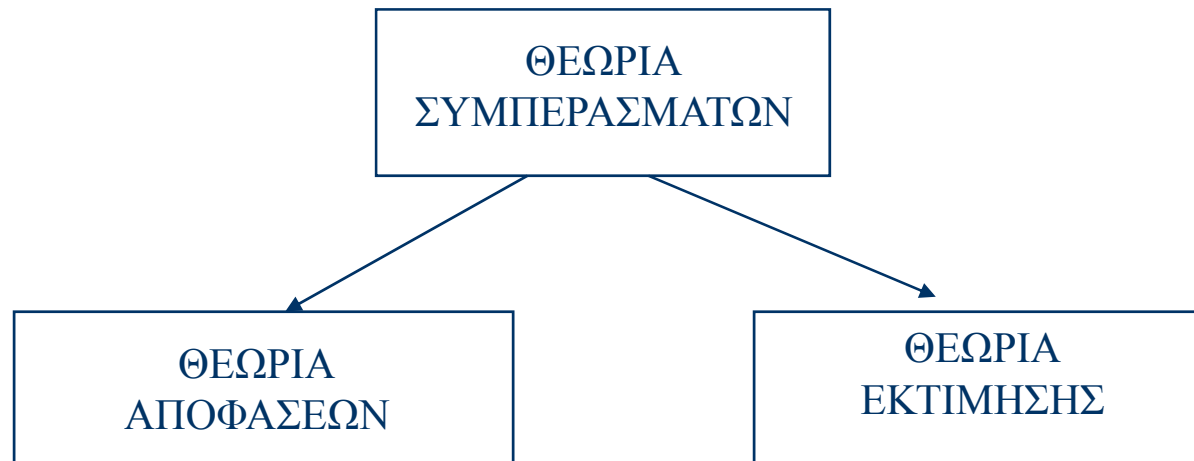
Stochastic Signals Class

Estimation Theory

Andreas Polydoros
University of Athens
Dept. of Physics
Electronics Laboratory

Τι είναι «Εκτίμηση» (Estimation)?

Γενικό Πλαίσιο: Θεωρία και Πράξη Συμπερασμάτων (Inference)



Αποφαση: διαλέγω μια απο συγκεκριμενο αριθμο περιπτωσεων

Εκτιμηση: διαλέγω μια απο απειρο αριθμο περιπτωσεων

Παραδειγματα:

- κρινω αν ερχεται αεροπλανο η οχι βασει radar
- κρινω αν το bit που εστειλε ενας πομπος ειναι +1 η -1
- αποφασιζω με τι βαθμο θα βαθμολογισω καποιον

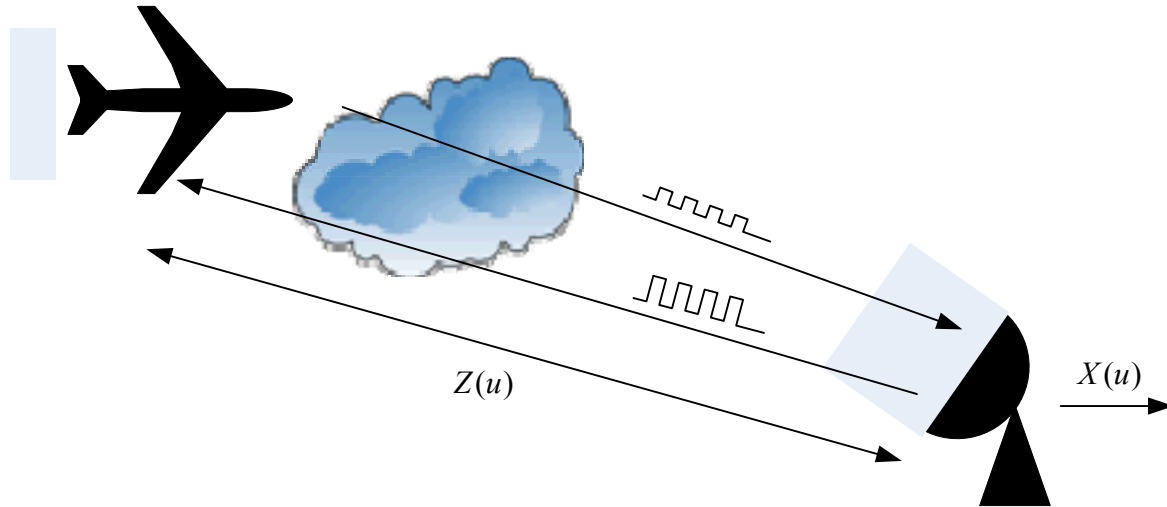
Παραδειγματα:

- μετρω («εκτιμω») απο ποια γωνια ερχεται το αεροπλανο
- εκτιμω ποση ειναι η ισχυς ενος πομπου
- μετρω το βαρος ενος ανθρωπου, η ενα ηλεκτρικο δυναμικο, η μια οποιαδηποτε αλλη μετρηση που δεν ειναι «τελεια»

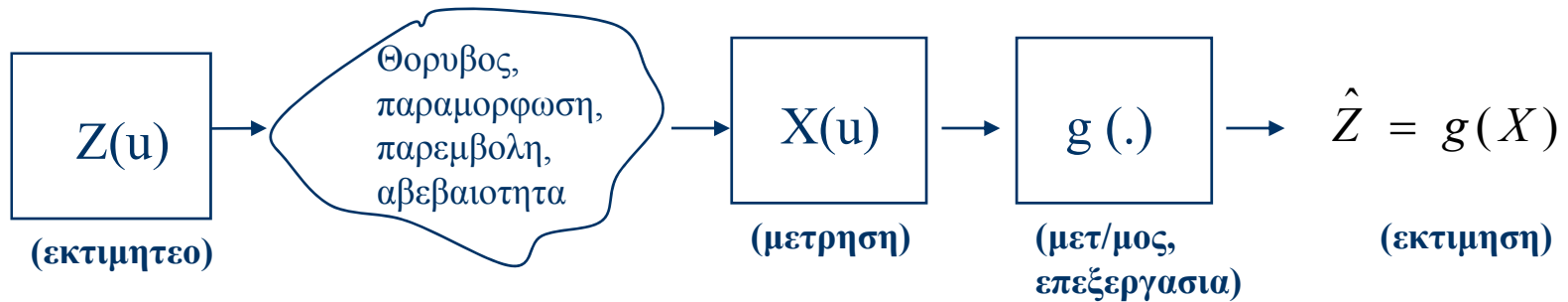
Αυτο που κανει το προβλημα ενδιαφερον ειναι η αβεβαιοτητα στα δεδομενα βασει των οποιων λαμβανεται μια αποφαση η γινεται μια εκτιμηση

Γιατι αβεβαιοτητα?

- ❑ Ολες οι μετρησεις (measurement), παρατηρησεις (observation), καταγραφη δεδομενων (data record) εμπεριεχουν αβεβαιοτητα, αρα πρεπει να προσεγγιστουν πιθανολογικα (στοχαστικα).
- ❑ Η πηγη της αβεβαιοτητας μπορει να ειναι θορυβος μετρησης, παρεμβολη, παραμορφωση σηματος, κλπ.
- ❑ Αρα, αυτο που θελουμε να εκτιμησουμε (Z) συνδεεται μεν, αλλα δεν ταυτιζεται με αυτο που μετραμε, την παρατηρηση (X)



Μοντέλο συστηματος



Λογω των αβεβαιοτητων η εκτιμηση δεν θα ειναι συνηθως επακριβως σωστη, αρα θα εχουμε σφαλμα ισο με

$$E(u) = Z(u) - \hat{Z}(u) = Z(u) - g(X(u))$$

το οποιο σφαλμα:

- ειναι στατιστικο (δηλ. τυχαια μεταβλητη) αφου και το $Z(u)$ και το $X(u)$ ειναι τ.μ.
- εξαρταται απο την στατιστικη σχεση Z και X , δηλ. την απο κοινου σ.π.π. (pdf)
- εχει στατιστικες τιμες που μπορουν να υπολογιστουν, αλλα εν γενει μας αφορα κυριως η μεση τιμη $\bar{E}(u) = \mathcal{E}\{E(u)\}$ και η δευτερη ροπη $\mathcal{E}\{(Z - g(X))^2\}$

Κριτηρια

Το ποια είναι η «σώστη» συνάρτηση εκτίμησης (ο μετ/μος $g(\cdot)$) εξαρτάται από το λεγόμενο **κριτήριο** που υιοθετούμε. Διαφορετικά κριτήρια οδηγούν σε διαφορετικές λύσεις.

Σημείωση:

- καμία λύση δεν είναι «καλύτερη» από μια άλλη αν αντιστοιχούν σε διαφορετικά Κριτήρια
- Μπορούμε να συγκρίνουμε μόνον λύσεις για το ίδιο κριτήριο: η «βελτιστή» λύση για το κριτήριο K , μια κατώτερη λύση για το κριτήριο K , κλπ.
- Εμείς θα αναζητήσουμε τις βελτιστές λύσεις για ένα συγκεκριμένο κριτήριο, το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (mean square error)

Μερικές άλλες υποψηφίες επιλογές για κριτήρια:

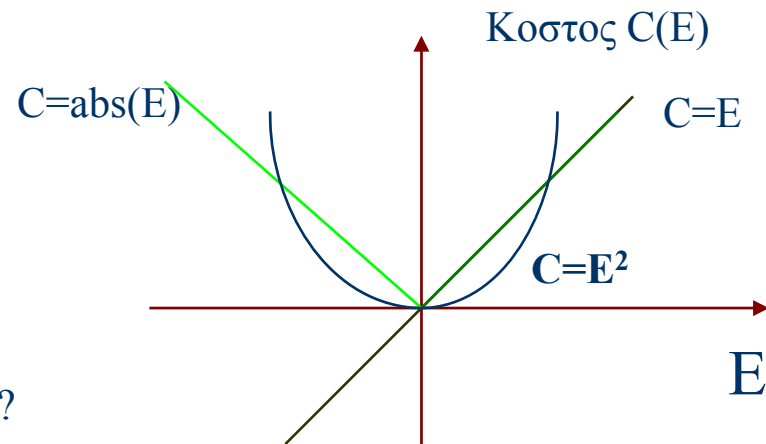
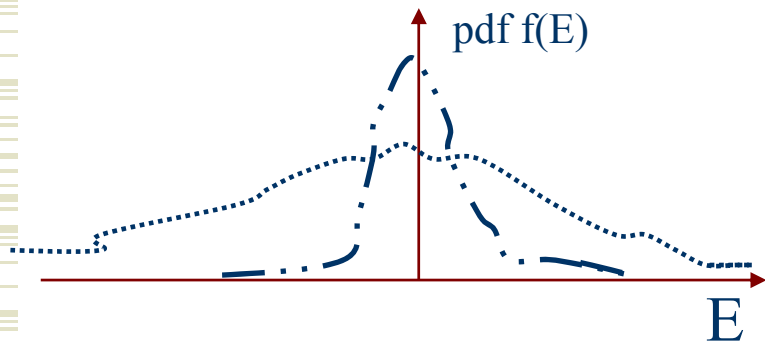
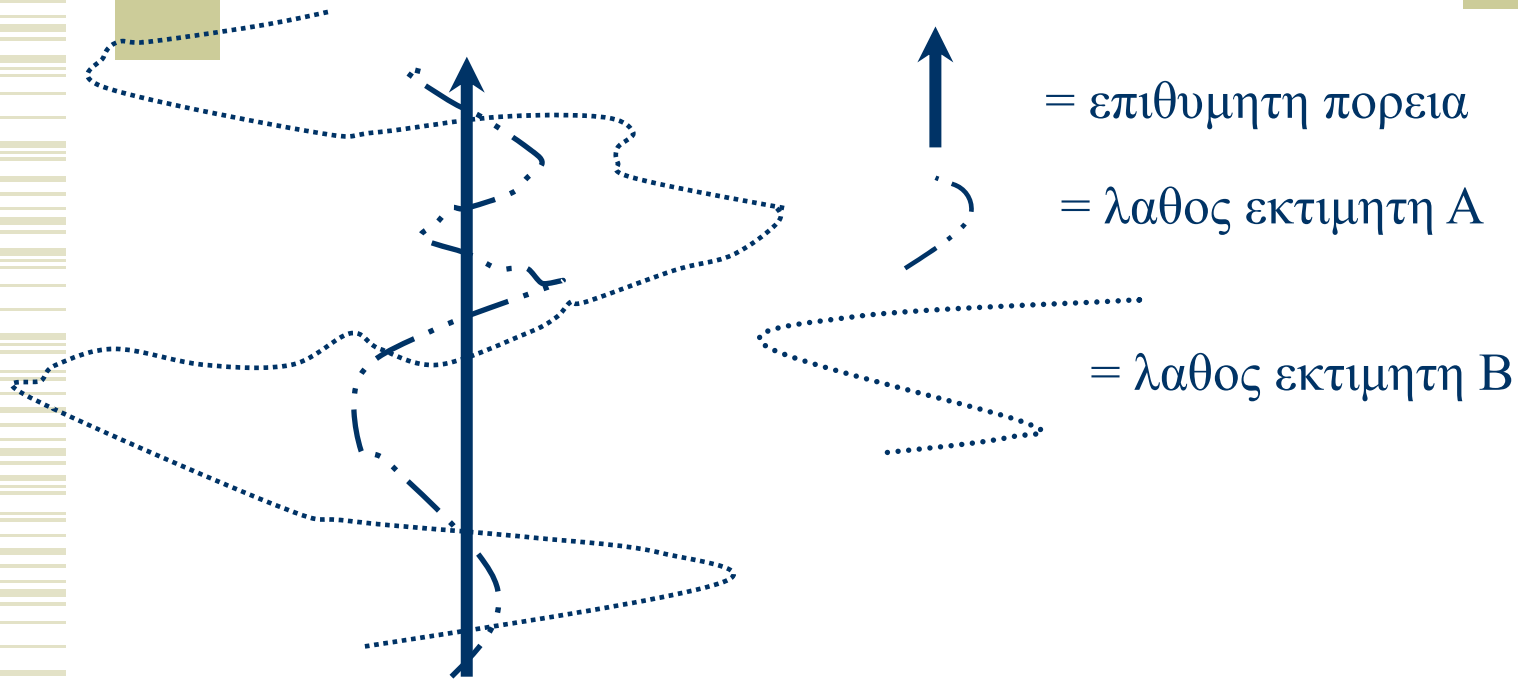
➤ Μέσο σφάλμα $\mathcal{E}\{(Z - g(X))\}$

➤ μέσο απόλυτο σφάλμα $\mathcal{E}\{|Z - g(X)|\}$

➤ Μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) $\mathcal{E}\{(Z - g(X))^2\}$

- Εν γένει, θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη *μεση τιμή* μιας συνάρτησης $C(E)$ του σφαλματος E
- Η συνάρτηση αυτή, $C(E)$, λέγεται **κόστος** του σφαλματος
- Άρα διαλέγουμε τον εκτιμητή $g(\cdot)$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το **μέσο κόστος** (η μεση τιμή λαμβάνεται υπό την κοινή κατανομή των Z και X)

Περι σφαλμάτων και κριτηριων



Ερωτηση: ειναι καλο κριτηριο το μεσο σφαλμα?

Λυση για το ΜΤΣ

Μαθηματικός Ορισμός:

Να βρεθεί η $g(x)$ που ελαχιστοποιεί την $MSE = \mathcal{E} \left\{ (Z - g(X))^2 \right\}$

Απάντηση:

(α) Για $g(x) = \mathbf{a}$ (μια σταθερά, μη συνάρτηση του x), $\mathbf{a} = \mathcal{E} \{ Z(u) \}$

Σημείωση: τι σημαίνει «σταθερή απάντηση»?

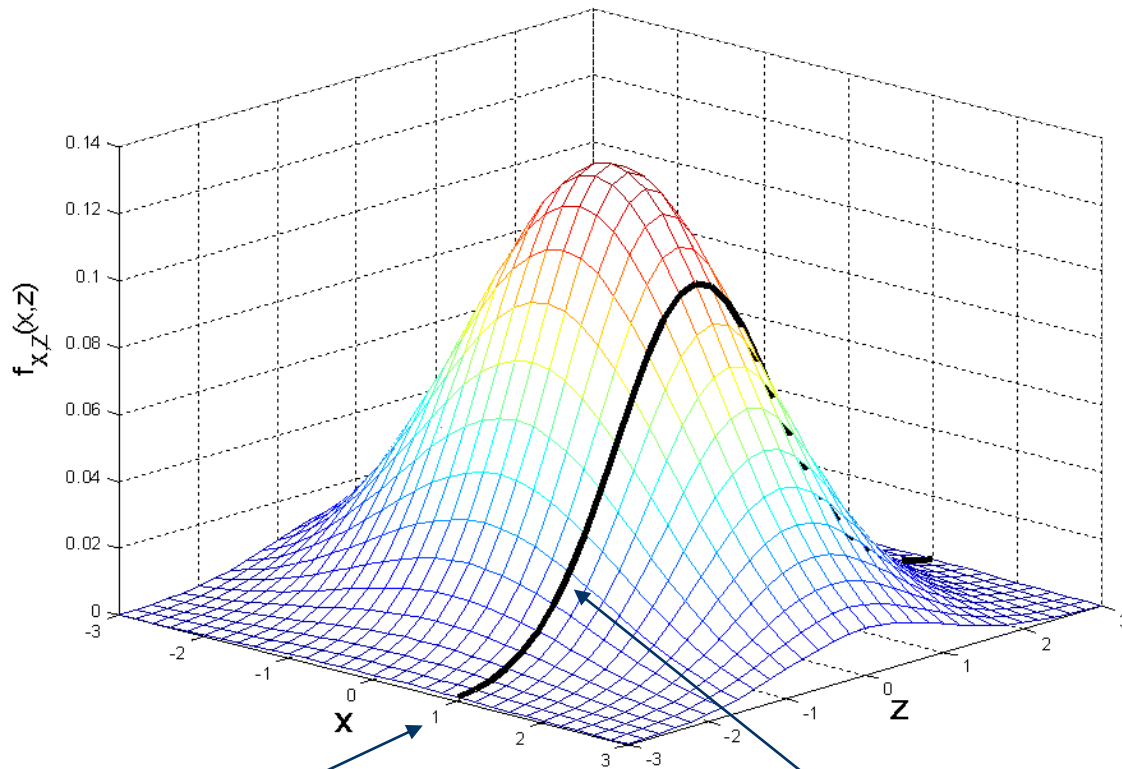
(β) Για την γενική περίπτωση, $g(X) = \mathcal{E} \{ Z / X \}$

Το εναπομείναν, ελαχιστο δυνατό σφάλμα ισούται με

$$\mathcal{E} \left\{ (Z - \mathcal{E} \{ Z / X \})^2 \right\} = \mathcal{E} \{ Z^2 \} - \mathcal{E} \{ \hat{Z}^2 \} \quad (\text{να δειχθεί!})$$

Όλοι οι άλλοι εκτιμητές θα έχουν σφάλμα μεγαλύτερο ή ίσο με αυτό.

Πως βρισκεται ο υπο-συνθηκη μεσος ορος?



$$X = x_0$$

$$f_{Z|X}(z|x_0) = \frac{f_{Z,X}(z,x_0)}{f_X(x_0)} = \frac{f_{Z,X}(z,x_0)}{\int f_{Z,X}(z,x_0) dz}$$

Λυση για το ΜΤΣ υπο τον γραμμικο περιορισμο

Εαν επιμενουμε σε μια απλη λυση, π.χ., γραμμικη της μορφης

$$\hat{Z} = g(X) = aX + b$$

τοτε η βελτιστη λυση ειναι

$$\hat{Z} = g(X) = \frac{\rho_{ZX}\sigma_Z}{\sigma_X}(X - m_X) + m_Z$$

και εξαρταται μονον απο τις μεσες τιμες και τυπικες αποκλισεις των Z και X , καθως και τον συντελεστη συσχετισης τους ρ_{ZX} .

➤ Εαν οι Z και X ειναι ασυσχετιστες μεταξυ τους (ο συντελεστης ρ ειναι μηδεν), τοτε η εκτιμηση της Z ειναι η σταθερα μεση τιμη της, δηλ. αγνοουμε την μετρηση αφου δεν μας λειει τιποτα για την Z στα πλαισια της γραμμικης εκτιμησης.

Ειδική περίπτωση: προσθετικός θορυβός

$$X = Z + N \quad \text{με } Z(u), N(u) \text{ ανεξαρτητες τ.μ.}$$

Η γενική λύση είναι

$$\mathcal{E}\{Z|X\} = \int z f_{Z|X}(z|x) dz$$

οπου

$$f_{Z|X}(z|x) = \frac{f_{Z,X}(z,x)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Z}(x|z)f_Z(z)}{f_X(x)} = \frac{f_N(x-z)f_Z(z)}{f_Z \otimes f_N(x)}$$

Η γραμμική λύση είναι

$$\hat{Z} = m_Z + \frac{\sigma_Z^2}{\sigma_Z^2 + \sigma_N^2} (X - m_X)$$